G1-234-1e

martedì 3 ottobre 2023 12:51

Esercizio e parte: $(P(X), \Delta, \cap)$ è anello
e $(P(X), \Delta, \cup)$?

Esercizi sui complessi

① scrivere esplicitamente $(x+iy)^n = (\quad) + i(\quad)$
per $n = 2, 3, 4$, poi generale

② scrivere esplicitamente $\frac{x+iy}{a+ib} = (\quad) + i(\quad)$

③ siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ distinti
$b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ (serve che siano $\neq 0$?)
trovare un polinomio $P(X) \in \mathbb{C}[X]$
di grado minimo tale che $P(a_i) = b_i \ \forall i = 1, 2, \dots n$.

④ trovare formule per esprimere
$\cos(nx)$ e $\sin(nx)$
in termini di $\cos(x)$, $\sin(x)$ e potenze.

⑤ Calcolare lato, perimetro, area dei
poligoni regolari con n lati
inscritti (e circoscritti) nella circonferenza unitaria

verificare $\lim_{n \to \infty}$ di perimetro e area

⑥ descrivere "geometricamente"

z_1/z_2 con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$

$\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$ con $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_2$.

ⓐ determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^2 = \bar{z}^2$
(e in generale $z^n = \bar{z}^n$ per $n \in \mathbb{N}$).
ⓐ' $z^n = \bar{z}$?

ⓑ determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che:
$z + \bar{z} = z\bar{z}$

ⓒ ~~scrivere~~ trovare le formule risolutive per l'equazione

$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

ⓓ dato l'espressione

$\omega = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$
(z, ω "incognite" in $\mathbb{C}$)

sotto quali condizioni possiamo ricavare z
in funzione di ω? e come?

sotto quali condizioni la funzione $z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
è costante?
($\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$?)

$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ = costante $\Leftrightarrow$
$\alpha z + \beta = \varepsilon(\gamma z + \delta)$
$= \varepsilon\gamma z + \varepsilon\delta$ per ogni z
$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \varepsilon\gamma \\ \beta = \varepsilon\delta \end{cases}$ per qualche $\varepsilon \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$
$\alpha\delta = \beta\gamma$
$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$

se non è costante, è biiettiva?

ⓔ I seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ sono "chiusi"
per somme, prodotti, opposti, inversi?

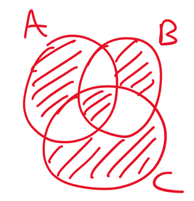
chiuso per la somma significa
"$\alpha, \beta \in$ sottoinsieme $\Rightarrow \alpha + \beta \in$ sottoinsieme"

$\mathbb{R} = \{ x + i0 \mid x \in \mathbb{R} \}$
$i\mathbb{R} = \{ 0 + iy \mid y \in \mathbb{R} \}$
$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$
$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$

Associatività di Δ: $A \Delta (B \Delta C) \stackrel{?}{=} (A \Delta B) \Delta C$?

basta mostrare $A \Delta (B \Delta C) \subseteq (A \Delta B) \Delta C$
(perché allora abbiamo anche
$(A \Delta B) \Delta C = C \Delta (B \Delta A)$
$\subseteq (C \Delta B) \Delta A = A \Delta (B \Delta C)$
perché sappiamo che Δ è commutativa....)

ora:
(0) basta un disegno?



$(A \Delta B) \Delta C$
è simmetrico in A, B, C...

ma quanti disegni bisogna fare?

?

(1) usiamo gli elementi:

$x \in A \Delta (B \Delta C)$
- $\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \Delta C \end{cases}$
  - $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \in C \end{cases}$ $A \cap B \cap C$
  - $\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases}$ $A \setminus (B \cup C)$
- $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \Delta C \end{cases}$
  - $\begin{cases} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases}$ $B \setminus (A \cup C)$
  - $\begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \\ x \in C \end{cases}$ $C \setminus (A \cup B)$

$A \Delta (B \Delta C)$ = unione di 4 insiemi,
$A \cap B \cap C$
$A \setminus (B \cup C)$
$B \setminus (A \cup C)$
$C \setminus (A \cup B)$

tutti sono $\subseteq (A \Delta B) \Delta C$

(oppure si vede che $C \Delta (B \Delta A)$
è unione degli stessi 4 insiemi ...)

ⓒ $\alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0$ se $\alpha = 0$, facile (1° grado): $X = -\frac{\gamma}{\beta}$
altrimenti:

$\alpha \left(X^2 + \frac{\beta}{\alpha} X + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = 0$

$\left(X + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$

$\left(X + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$

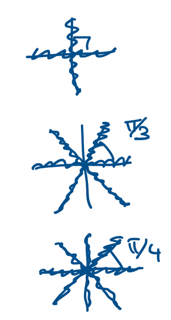
$X + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\text{radici di } (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2\alpha}$

$X = \frac{-\beta + \text{radici di } (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \delta}{2\alpha}$ con δ una radice quadrata di $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ← piccolo abuso di linguaggio:
in $\mathbb{C}$ non c'è un modo canonico di scegliere una radice quadrata...
(in $\mathbb{R}$ si usa quella > 0,
ma $\mathbb{C}$ non è ordinato ...).

ⓐ $z^n = \bar{z}^n = \overline{z^n}$ sse $z^n \in \mathbb{R}$
sse $z \in$ rette per 0 con angoli $\pi/n \, k$
($k = 0, 1, \dots,$)

$n = 2$
$n = 3$
$n = 4$



ⓐ' $z^n = \bar{z} \Rightarrow |z|^n = |\bar{z}| = |z|$ dunque $|z|^n - |z| = 0$
$|z|^{n-1}(|z| - 1) = 0$

quindi
- $|z| = 0$, $z = 0$
- $|z| = 1$, cioè $z \in S^1$

$\Rightarrow z^{n+1} = z\bar{z} = |z|^2 = 1$
$\Rightarrow z$ radici $(n+1)$-esime dell'1.

Le soluzioni sono 0 e le radici $(n+1)$-esime di 1.

anche i primi 20 esercizi del paragrafo 9.4 (capit. 0)
delle dispense AGLA sono interessanti

① Che sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ sono soluzioni di
equazioni del tipo

$\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$?

② che sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ sono soluzioni di
equazioni del tipo

$z\bar{z} + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$?

⊛ Fare un riepilogo delle proprietà di $\mathbb{C}$
e un dizionario
algebra in $\mathbb{C}$ ⟷ geometria nel $\mathbb{R}^2$

es:
moltiplicare per i ⟷ rotazione di $\pi/2$
moltiplicare per $\rho \operatorname{cis}(\theta)$ ⟷ rotazione di θ e dilatazione di ρ

sommare z ⟷ TRASLAZIONE
invertire z ⟷ ?
rette
circonferenze
radici n-esime ⟷ poligoni regolari

③ Guardare gli esercizi sui numeri $\mathbb{C}$
nei compiti degli anni scorsi.

④ Consideriamo la fattorizzazione

$X^n - 1 = (X - z_0)(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1})$

dove $z_k = e^{i \frac{2\pi}{n} k}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$
(radici n-esime di 1,
vertici del poligono regolare
con n lati nell' S^1)

calcolare
$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1}$

$\sum_{k, \ell \text{ DIVERSI}} z_k z_\ell$

⋮

Somme dei prodotti di s termini DISTINTI tra $z_0 \dots z_k$

⋮

$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 z_1 \cdots z_k$

(In generale: se

$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0 =$
$(X - z_1)(X - z_2) \cdots (X - z_n)$

che relazione c'è tra i coefficienti a_i e gli zeri z_i ?)