01-234-21-ter-1

Stesso tipo: SPAZI VETTORIALI

1) **Richiamo:** $\mathbb{K}$ campo, $\mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K}\in\mathbb{C}$) campo (operazioni componente per componente)

$\mathbb{K}^1, \mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3, \dots$ tutti insieme vanno studiati in modo unitario

Per studiare la geometria di $\mathbb{K}^2$ basta usare soltanto gli scalari ($\in\mathbb{K}$) → SPAZI VETTORIALI

Ma perché studiare $\mathbb{K}$? Perché possiamo usare nozioni e risultati validi per $\mathbb{K}$ per essere in grado di risolvere problemi in $\mathbb{K}^2$

Proprietà valide sempre per campi qualsiasi $\mathbb{K}$:

$\mathbb{K}$ può essere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, ...

$$\begin{cases} \mathbb{K}\neq\{0,1\} \\ \mathbb{K}\supseteq\{0,1,1+1,\dots\} \quad (\text{dove } 1+1=2) \\ \forall x\in\mathbb{K},\ x\neq 0,\ \exists y\in\mathbb{K}\ \text{t.c.}\ xy=1 \end{cases}$$

2) **Definizione astratta dello spazio vettoriale** (su campo $\mathbb{K}$ qualsiasi)

- Un insieme V dotato di 2 operazioni (che chiameremo "+" e "$\cdot$", ma sono astratte, non necessariamente quelle standard)
  - $+: V\times V \longrightarrow V$ (somma tra vettori)
  - $\cdot: \mathbb{K}\times V \longrightarrow V$ (prodotto per scalari)

Definizione (V con $+$ e $\cdot$ è uno spazio vettoriale se)

Assiomi: $\forall u,v,w\in V$, $\forall a,b\in\mathbb{K}$

1. $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. $\exists 0_V\in V$ t.c. $v+0_V=v$ $\forall v\in V$
3. $\forall v\in V$, $\exists -v\in V$ t.c. $v+(-v)=0_V$
4. $u+v=v+u$
5. $(a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$
6. $a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v$
7. $(ab)\cdot v = a\cdot(b\cdot v)$
8. $1\cdot v = v$

(Vedremo, ...)

Proprietà non assiomi:

Basta che:

- $0_V\cdot v = 0_V$ $\forall v\in V$, dove 0_V è quello di 2.
- $(-1)\cdot v = -v$ $\forall v\in V$, dove $-v$ è quello di 3.
- $a\cdot 0_V = 0_V$ $\forall a\in\mathbb{K}$, dove 0_V è quello di 2.

Esempi:

- $\mathbb{K}^n$ con $+$ e $\cdot$ definiti componente per componente
- $\mathbb{K}[x]$ con $+$ e $\cdot$ definiti come sappiamo
- $\mathbb{K}^{m\times n}$ con $+$ e $\cdot$ definiti componente per componente

Nota: $\mathbb{K}^n$ = spazio $\mathbb{K}^n$ (coordinate campo $\mathbb{K}$)

$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i\in\mathbb{K} \right\}$ = "spazio numerico su $\mathbb{K}$"

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$a\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$0_{\mathbb{K}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

In maniera analoga con $(m,n,\dots)\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $\in\mathbb{K}^{m\times n}$, ...

Nota anche: $\mathbb{K}^{m\times n}$ = spazio delle matrici $m\times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$

Per ogni coppia (m,n) abbiamo uno spazio vettoriale diverso

3) Scrivere esplicitamente tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^2$.

- $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (ovvio)
- $\mathbb{R}^2$ (ovvio)
- Se U è una retta per l'origine, $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=mx\}$ per qualche $m\in\mathbb{R}$ (oppure $x=0$)

Dimostrazione: Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ non banale, allora U contiene un vettore $v_0\neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Allora U contiene tutti i multipli di v_0 (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore w non multiplo di v_0, allora U contiene tutti i multipli di w (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore z non multiplo né di v_0 né di w, allora U contiene tutti i multipli di z (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore t non multiplo né di v_0 né di w né di z, allora U contiene tutti i multipli di t (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore s non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t, allora U contiene tutti i multipli di s (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore r non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s, allora U contiene tutti i multipli di r (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore q non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r, allora U contiene tutti i multipli di q (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore p non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q, allora U contiene tutti i multipli di p (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore o non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p, allora U contiene tutti i multipli di o (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore n non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o, allora U contiene tutti i multipli di n (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore m non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n, allora U contiene tutti i multipli di m (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore l non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m, allora U contiene tutti i multipli di l (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore k non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l, allora U contiene tutti i multipli di k (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore j non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k, allora U contiene tutti i multipli di j (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore i non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j, allora U contiene tutti i multipli di i (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore h non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i, allora U contiene tutti i multipli di h (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore g non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h, allora U contiene tutti i multipli di g (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore f non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g, allora U contiene tutti i multipli di f (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore e non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f, allora U contiene tutti i multipli di e (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore d non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e, allora U contiene tutti i multipli di d (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore c non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d, allora U contiene tutti i multipli di c (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore b non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c, allora U contiene tutti i multipli di b (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore a non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b, allora U contiene tutti i multipli di a (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore z non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a, allora U contiene tutti i multipli di z (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore y non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z, allora U contiene tutti i multipli di y (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore x non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y, allora U contiene tutti i multipli di x (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore w non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x, allora U contiene tutti i multipli di w (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore v non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w, allora U contiene tutti i multipli di v (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore u non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v, allora U contiene tutti i multipli di u (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore t non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u, allora U contiene tutti i multipli di t (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore s non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t, allora U contiene tutti i multipli di s (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore r non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s, allora U contiene tutti i multipli di r (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore q non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r, allora U contiene tutti i multipli di q (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore p non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q, allora U contiene tutti i multipli di p (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore o non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p, allora U contiene tutti i multipli di o (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore n non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o, allora U contiene tutti i multipli di n (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore m non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n, allora U contiene tutti i multipli di m (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore l non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m, allora U contiene tutti i multipli di l (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore k non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l, allora U contiene tutti i multipli di k (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore j non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k, allora U contiene tutti i multipli di j (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore i non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j, allora U contiene tutti i multipli di i (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore h non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i, allora U contiene tutti i multipli di h (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore g non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h, allora U contiene tutti i multipli di g (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore f non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g, allora U contiene tutti i multipli di f (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore e non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f, allora U contiene tutti i multipli di e (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore d non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e, allora U contiene tutti i multipli di d (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore c non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d, allora U contiene tutti i multipli di c (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore b non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c, allora U contiene tutti i multipli di b (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore a non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b, allora U contiene tutti i multipli di a (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore z non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a, allora U contiene tutti i multipli di z (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore y non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z, allora U contiene tutti i multipli di y (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore x non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y, allora U contiene tutti i multipli di x (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore w non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x, allora U contiene tutti i multipli di w (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore v non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w, allora U contiene tutti i multipli di v (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore u non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v, allora U contiene tutti i multipli di u (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore t non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u, allora U contiene tutti i multipli di t (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore s non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t, allora U contiene tutti i multipli di s (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore r non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s, allora U contiene tutti i multipli di r (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore q non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r, allora U contiene tutti i multipli di q (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore p non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q, allora U contiene tutti i multipli di p (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore o non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p, allora U contiene tutti i multipli di o (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore n non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di o, allora U contiene tutti i multipli di n (per chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare). Se U contiene un altro vettore m non multiplo né di v_0 né di w né di z né di t né di s né di r né di q né di p né di o né di n né di m né di l né di k né di j né di i né di h né di g né di f né di e né di d né di c né di b né di a né di z né di y né di x né di w né di v né di u né di t né di s né di r né di q né di p né di