# Basi: dimensione, teo. struttura sottospazi

**Esempio:** $V_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \}$

$= \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ ($e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, ..., $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

osservo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$, ..., $v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

ogni vettore $v \in V_n(\mathbb{R})$ si scrive non banalmente come combinazione lineare dei $v_i$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{sistema}} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \vdots \\ \alpha_n = 1 \end{cases}$ (impossibile: $1 \neq 2$)

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 1 \\ \alpha_4 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 1 \\ \alpha_4 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$ (OK!)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (\alpha_3 + \dots + \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

osservo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$, ..., $v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $V_n(\mathbb{R})$ (combinazione lineare di $e_1, e_2, \dots, e_n$)

**Esempio:** $W \subseteq V_4(\mathbb{R})$
$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

ogni $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W$ si scrive così:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \alpha \end{cases}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

cioè:
$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = \alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\beta = \frac{x_3}{\alpha} = \frac{x_3}{x_4}$, $\gamma = \frac{x_2}{\alpha} = \frac{x_2}{x_4}$

$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$

ogni elemento

$V \in \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 + x_3, x_2 = x_3 + x_4, x_3 = x_4 \}$

$\Rightarrow$ si può scrivere anche $\beta$, $\gamma$ anche $\alpha$.

In generale:
$W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq V_n(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ sistema $\begin{cases} \alpha_1 v_{11} + \dots + \alpha_k v_{k1} = x_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_{1n} + \dots + \alpha_k v_{kn} = x_n \end{cases}$ ha soluzione

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ha soluzione

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in$ ...

**Teorema generale**

$V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$;
$S \subseteq V$ linearmente ind. $V$:

① dicemmo che $S$ è generato per $V$ (o un sistema generatore per $V$)
se $\langle S \rangle = V$ ($\langle S \rangle \supseteq V$)
cioè ogni vettore di $V$ è combinazione lineare finita dei elementi di $S$.

Chiamiamo sottospazio $S$ generato per $V$ e tali punti, poiché $\langle S \rangle$,

$V \in$ finitamente generato se esistono un sistema generatore per $V$ finito.

es. $V_n(\mathbb{R}) \in$ f.g. ($\{e_1, \dots, e_n\}$ generatore)
$K[x]$ non $\in$ f.g.

ES. Esercizio: se $S$ è generatore per $V$
e $S' \supseteq S$ allora $S'$ è generatore per $V$.
(ESERCIZIO: $V$ generato dagli $S$ generatori)

② $S \in$ Elementare indipendente
(@ LOBOSO) se:
* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i = 0$ con $s_i \in S$ allora $\alpha_i = 0$ $\forall i$
* ogni combinazione finita di elementi di $S$ che dà $0$ allora $0$ ha tutti i coefficienti $= 0$
* unico modo per ottenere $0$ usando solo cose di elementi di $S$ è usare tutti i coefficienti $= 0$.

Se ogni vettore di $\langle S \rangle$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di $S$:
$v \in \langle S \rangle$ $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i$ $s_i \in S$
$= \sum_{j=1}^{h} \beta_j s_j$ $s_j \in S$
Ora $v - v = \sum_i (\alpha_i - \beta_i) s_i$
$S$ libero $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0$ $\forall i$
$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ $\forall i$

Se * ogni vettore di $\langle S \rangle$ si scrive in modo unico come combinazione dei vettori di $S$.

$S$ libero, $S \subseteq S \Rightarrow S$ libero
$S$ sottoinsieme del libero libero

Dimostr.: per cancellazione sottoinsiemi liberi
per quanti pezzi libe...

Esempi: $V_n(\mathbb{R})$: $\{e_1, e_2, e_3\}$ libero. (ex. bas)
$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha_1 = x_1 \\ \alpha_2 = x_2 \\ \alpha_3 = x_3 \end{cases}$

$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ libero di $V_n(\mathbb{R})$
$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = \gamma \end{cases}$
$\begin{cases} \alpha = x_1 - x_2 \\ \beta = x_2 - x_3 \\ \gamma = x_3 \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = \gamma \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$
ogni elemento

In generale:
$W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq V_n(\mathbb{R})$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow$ sistema $\begin{cases} \alpha_1 v_{11} + \dots + \alpha_k v_{k1} = x_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_{1n} + \dots + \alpha_k v_{kn} = x_n \end{cases}$ ha soluzione
$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ha soluzione
$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in$ ...

Nota: $S \subseteq V$
① $S$ è generatore se ogni vettore di $V$ ottiene $\langle S \rangle$ di $V$ ($\langle S \rangle = V$)
② $S \in \{0\}$ libero $\Leftrightarrow$ $0 \neq 0$
③ $S \in \{v, w\}$ libero $\Leftrightarrow$ $v, w$ libero $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$
$v \neq 0$, $w \neq 0$
$w \neq \alpha v$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$w \neq \alpha v$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
$v \neq \alpha w