Esercizi sugli spazi vettoriali:

① Controllare e descrivere i sottospazi di $\mathbb{R}^2$
$\{\alpha v + \beta w\}$ con $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ e

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, w$
(2) $\alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{Z}$
(3) $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Z}$ e $\alpha, \beta \in [0,1]$
(4) $\alpha, \beta \in [0,1]$
(5) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e $\alpha, \beta \in [0,1]$
(6) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
(7) $\alpha, \beta \leq 1$

(1)=(2)
(3)=(4)

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\ \alpha+3\beta\end{pmatrix}$
$\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = \alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3x_1 - x_2}{3} \\ \beta = \frac{x_2 - x_1}{3} \end{cases}$



(si vedono spazio e dimensione vedere x/y)

e controllare se sono sottospazi vettoriali.

(inventare lo stesso esercizio in $\mathbb{R}^3$ con 3 vettori)

② Dato $X$ insieme qualsiasi, allora $P(X)$ è GRUPPO ABELIANO con l'operazione $\Delta$

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(verificare).

Ora è anche SPAZIO VETTORIALE con $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ usando $(P(X), \Delta, \cdot)$ con prodotto per scalare definito in modo unico possibile: $0 \cdot A = \emptyset$, $1 \cdot A = A$.

(verificare)

$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è campo con 2 elementi: $0, 1$ obbligato da $1+1=0$

Mostrare che: un gruppo additivo $(G, +)$ è sp. vettoriale su $\mathbb{F}_2$ SE per ogni $g \in G$ abbiamo $g + g = 0_G$ (cioè $-g = g$).

(Siccome $(G,+)$ è gruppo abel., e l'moltiplicazione di $\mathbb{F}_2$ è completamente legata ai scalari: $0 \times g = 0$, $1 \times x = x$ $(\forall x \in G)$.
Inoltre verificare le proprietà associat./distrib.:
$(x+y)\cdot v = x\cdot v + y\cdot v \Rightarrow (1+1)g = 1\cdot v + 1\cdot v$
$x\cdot(v+w) = x\cdot v + x\cdot w$ $\quad 0 = 0$
$\cdot(y\cdot v) = (x\cdot y)\cdot v$ } sono valide comunque.

③ Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ sp. vett. su $\mathbb{R}$ delle matrici quadrate $2\times2$ e consideriamo i seguenti sottoinsiemi:

$W_1 = \{$matrici tali che la somma di ogni riga è $\leq 0\}$
$W_2 = \{$ " " " " " " colonna $\leq 0\}$

Verificare se sono sottospazi vettoriali di $V$,
determinare $W_1 \cap W_2$
determinare $W_1 + W_2$ (già sicuro sottospazio da confermare)
e inoltre $W_1 \oplus W_2 \overset{?}{=} W_1 + W_2$ (cioè è spazio somma?).

È vero o falso che ogni matrice in $V$ si scrive come somma di una in $W_1$ e una in $W_2$?

quadrati

$$W_1 \cap W_2 \ni \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}} & \begin{matrix} a+b \\ c+d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a+c & b+d \end{matrix} & \text{indifferente} \end{pmatrix} =$$
$$= a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Cioè tutte combinazioni di quelle 4 matrici:

$$W_1 \ni \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \text{etc.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

combinazione di 6 matrici...

$W_2 \ni$ stessa cosa...

$W_1 + W_2$: siccome di matrici in $W_1$ e in $W_2$, in ogni caso abbiamo "somma di righe fa positivo", quindi non devono stare $-1, -2$, $W_1 + W_2$ (quindi ogni matrice con termini della diagonale $= 0$ è in $W_1 + W_2$ ...)

④ Sia $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq 6}$ (polinomi formali grado $\leq 6$)

e $W_P = \{P(x) \in V : P(x) = P(-x)\}$

$W_D = \{P(x) \in V : P(x) = -P(-x)\}$

Significa $W_P \cap W_D = \{0\}$, $W_P + W_D = V$

Mostrare che sono sottospazi complementari, e scrivere ogni polinomio come somma di uno in $W_P$ e uno in $W_D$.

---

⑤ Relazioni tra $P(V)$ e $\mathbb{P}(V)$

Verificare che: $\langle\langle S\rangle\rangle = \langle S\rangle$
per $S \subseteq V$

$\langle S_1 \cap S_2\rangle \subseteq \langle S_1\rangle \cap \langle S_2\rangle$
$\langle S_1\rangle \cup \langle S_2\rangle \subseteq \langle S_1 \cup S_2\rangle = \langle S_1 + S_2\rangle = \langle\langle S_1\rangle \cup \langle S_2\rangle\rangle$
$S \subseteq S' \underset{\text{sp}}{\Rightarrow} \langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle \Rightarrow S \subseteq \langle S'\rangle$
$S = S' \underset{\text{sp}}{\Rightarrow} \langle S\rangle = \langle S'\rangle \Leftrightarrow S \subseteq \langle S'\rangle, S' \subseteq \langle S\rangle$
$\langle S\rangle = \langle S, S'\rangle \Leftrightarrow S' \subseteq \langle S\rangle$

⑥ basi, sp. complementi per sottosp., $\cap$, $+$

- In $V_2(\mathbb{R})$ usiamo $W = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle$
  $W' : \{x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 0\}$
  trovare eq. cartesiana per $W$,
  base per $W'$,
  sp. cart. e basi per $W \cap W'$ e $W + W'$.
- eq. cartesiane e basi per sottosp. es. ②③ sopra.

⑦ In $V_2(\mathbb{F}_p)$ contare:
- numero dei vettori $(p^2)$
- numero di basi
- numero di sottosp. di dim 1
- numero di sottosp. di dim 2
- numero di sottosp. di dim $n+1$

$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ è campo con $p$ elementi,
$V_2(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^2$ è insieme con cardinalità $n$ in $\mathbb{F}_p$, ie $\left(\begin{matrix} p \text{ scelte} \\ p \text{ scelte} \end{matrix}\right)$
$\# V_2(\mathbb{F}_p) = p^2$

Per avere una base ordinata:
1) scelgo un vettore $\neq 0$ $\longrightarrow p^2-1$
2) scelgo $v_2 \notin \langle v_1\rangle$ $\longrightarrow p^2-p$
3) scelgo $v_3 \notin \langle v_1, v_2\rangle$ $\longrightarrow p^2-p^2$
⋮
$n$) scelgo $v_n \notin \langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle$ $\longrightarrow p^2-p^{n-1}$
dunque ho $(p^2-1)(p^2-p)\cdots(p^2-p^{n-1})$ basi ordinate totali.

Per avere un sottosp. di dim 1:
scelgo $v \neq 0$ $\longrightarrow p^2-1$
ma tali: sono multipli $\neq 0$
dunque ho sempre $p-1$ $\longrightarrow p-1$
} $\frac{p^2-1}{p-1} = 1+p+\dots+p^{n-1}$

Per avere un sottosp. di dim 2:
scelgo 2 vettori linearmente indip. $\rightsquigarrow (p^2-1)(p^2-p)$
ma tante coppie di vettori linearmente dipendenti
dunque ho stesso problema $\longrightarrow (p^2-1)(p^2-p)$
} $\frac{(p^2-1)(p^2-p)}{(p^2-1)(p^2-p)}$
devo avere un numero intero!

Per avere un sottosp., basta una equazione lineare non $= 0$, e trovare dei multipli: $\frac{p^n-1}{p-1}$ sottospazi

---

Formula di Grassmann

⑧ Provare a cercare una "formula di Grassmann" per 3 sottosp.:
$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2 + W_3) = ?$

(in particolare non vengono formule di "inclusione/esclusione" un'uguaglianza!)

⑨ $W, W' \leq V$ sottospazi tali che $W \cap W' = \{0\}$,
sia $v \in V$, $v \notin W$, $v \notin W'$
calcolare la dimensione di $(W + \langle v\rangle) \cap (W' + \langle v\rangle)$.

Suggerimento: distinguere i casi: $v \in W + W'$, $v \notin W + W'$

(cosa cambia se $W \cap W' \neq \{0\}$?).

⑩ Se $H \leq V$ è sottospazio ($\dim_{\mathbb{K}} H = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$)
per ogni $W \in V$ abbiamo che:

$W \leq H$ oppure $\dim_{\mathbb{K}}(W \cap H) = \dim_{\mathbb{K}} W - 1$
($W \cap H$ è sottospazio di $W$)

se $L \leq V$ è retta ($\dim_{\mathbb{K}} L = 1$)
per ogni $W \leq V$ abbiamo che:

$L \leq W$ oppure $\dim_{\mathbb{K}}(L + W) = \dim_{\mathbb{K}} W + 1$.

Se $W, W' \leq V$ con $\dim_{\mathbb{K}} W > \dim_{\mathbb{K}} W'$, $\dim_{\mathbb{K}} V$,
allora $W \cap W' \neq \{0\}$.

Se $W, W' \leq V$ con $\dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' < \dim_{\mathbb{K}} V$
allora $W + W' \neq V$.

$\dim_{\mathbb{K}}(W + \langle v\rangle) = \dim_{\mathbb{K}} W + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}\langle v\rangle}_{1 \text{ perché } \neq 0} - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} W \cap \langle v\rangle}_{0 \text{ perché } \notin W} = \dim_{\mathbb{K}} W + 1$

$\dim_{\mathbb{K}}((W + \langle v\rangle) \cap (W' + \langle v\rangle)) = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(W + \langle v\rangle)}_{\dim_{\mathbb{K}} W + 1} - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(W + W' + \langle v\rangle)}_{\dim_{\mathbb{K}} W' + 1}$

Se $v \in W + W'$: $= \dim_{\mathbb{K}}(W + W') = \dim_{\mathbb{K}}(W + W') + 1$
e $\dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} W \cap W'}_{0}$

Se $v \notin W + W'$: $\dim_{\mathbb{K}}(W + W' + \langle v\rangle)$

$\begin{cases} 2 & \text{se } v \in W + W' \leftarrow \text{perché 2?} \\ 1 & \text{se } v \notin W + W' \leftarrow \text{chiaro che } (W + \langle v\rangle) \cap (W' + \langle v\rangle) = \langle v\rangle \end{cases}$

$\in$ intersezione! quindi $\geq 1$, dim $= 2$, quindi $= 1$.



$\begin{pmatrix} \text{se } v \in W + W' \text{ con } w \in W, w' \in W' \\ \text{allora } (\text{in } \mathbb{K}) \ v \in \langle w, w'\rangle \dots \end{pmatrix}$
$\in W \in W + \langle v\rangle$, $\in W' + \langle v\rangle$

---

⑪ Un $V_n(\mathbb{K})$ sia $e_1, \dots, e_n$ la base canonica,
$u_i = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \sum i e_i$;

i vettori $u_1 - e_1, u_2 - e_2, \dots, u_n - e_n$ formano una base di $V_n(\mathbb{K})$?
$v_1 \quad v_2 \quad v_n$

trovare le coordinate dei vettori di quella base $v_1, \dots, v_n$

trovare le coordinate del vettore generico $b = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = \sum b_i e_i$
nella base $v_1, \dots, v_n$.

⑫ Sia $Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{m_i}$ polinomio su $\mathbb{R}[x]$
di grado $k = \sum m_i > 0$
con $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$

e
$V_Q := \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \,\middle|\, P(x) \in \mathbb{R}[x], \text{ grado } P(x) < k \right\}$

allora:
① $V_Q$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (sottospazio di ?)
② $\dim_{\mathbb{R}} V_Q = n$ (sempre $\frac{1}{x-\alpha_1}, \frac{1}{x-\alpha_2}, \dots, \frac{1}{x-\alpha_n}$ basi)
③ l'insieme $\frac{1}{(x-\alpha_i)^k}$ con $\begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, m_i \end{matrix}$
è base di $V_Q$.

(questo si usa per fare integrali di funzioni razionali: c'è qualcosa di polinomiale; si dice "decomposizione in frazioni semplici".

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_j \frac{b_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} \quad \text{con } b_{ij} \in \mathbb{R}$$

provare con $Q(x) = x^2(x-1)^3 \dots$ ).

---

Sistemi con parametri:

$$\boxed{\begin{cases} \ell X + m Y - m Z = m \\ m X - \ell Y - \ell Z \\ X - Y - Z = 0 \end{cases}}$$

variabile $X, Y, Z$
parametri: $\ell, m$.

matrice:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ell & m & -m & m \\ m & -\ell & 0 & \ell \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow[\Pi \leftrightarrow \Pi]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ m & -\ell & 0 & \ell \\ \ell & m & -m & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Pi - \ell\Pi]{\Pi - m\Pi} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{\ell+m} & m & \ell \\ 0 & m\ell & -m\ell & m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Pi + \Pi]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \ell+m & \ell & \ell+m \\ 0 & m\ell & -m\ell & m \end{pmatrix}$$

$m = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \ell & \ell \\ 0 & \ell & \ell & \ell \end{pmatrix}$ $\ell \neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sol. una unica
$\ell = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sol. infinite

$m \neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \ell & \ell \\ 0 & \ell & \ell & \ell \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \ell & \ell \\ 0 & 0 & \frac{\ell^2}{2} & \frac{\ell^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \ell & \ell \\ 0 & 0 & \boxed{\ell} & \boxed{\ell} \end{pmatrix}$

$\Pi - \frac{\ell}{2}\Pi$: $-\ell + \ell - \frac{\ell^2}{2}$, $-\ell + \ell - \frac{\ell^2}{2}$, $\frac{\ell - \ell^2/2}{2}$, $\frac{\ell - \ell^2/2}{2}$

$\ell \neq 0$: $\ell = 0$ quando $\ell = 2$

$\ell = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sol. infinite

$\ell = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

---

su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2k & k^2-1 & 0 \\ k & -1 & -k & -1 \\ 1 & -k & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi \leftrightarrow \Pi} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & k \\ k & -1 & -k & -1 \\ 0 & 2k & k^2-1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Pi - k\Pi]{} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & k \\ 0 & \boxed{1+k^2} & -2k & -1+k^2 \\ 0 & 2k & k^2-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ $\quad b$

3 incognite, 3 equazioni, parametro $k$.

$X - kY + Z = k$

$$\det = \frac{(1+k^2)(k^2-1) + 4k^2}{(k^2+1)^2} = \frac{k^4+2k^2-1}{(k^2+1)^2}$$

$2k = 0$, $k = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ soluzione unica
rg 3

$k^2 - 1 = 0$, $k = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rg 2

$k = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rg 3

$k \neq 0$, $k \neq 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & k \\ 0 & \boxed{1+k^2} & k^2-1 & 0 \\ 0 & \underbrace{-2k}_{\neq 0} & -2k & -1+k^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & k \\ 0 & 2k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{k^4+2k^2-1}{2k}} & \boxed{-1+k^2} \end{pmatrix}$

$\Pi - \frac{-2k}{2k}\Pi$: $-2k = \frac{-1+k^2}{2k}(k^2-1) = \frac{-k^4 - (k^2-1)^2}{2k} = \frac{-k^4 + 2k^2 - 1 - k^4}{2k} = \frac{(k^2-1)}{2k}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & k \\ 0 & 2k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k^4+2k^2-1}{2k} & -1+k^2 \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{C}$: $k^4 + 2k^2 - 1 = 0$ se $k = \pm i$
allora di rango della matrice incompleta $< 2$
ma anche il termine $-1+k^2 = 0$
dunque $\begin{pmatrix} 1 & i & -1 & i \\ 0 & 2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ compatibile semplice

$i$ rango $= 0$
$k$
rg $= 3$