G1-234-31-alm-1

lunedì 13 novembre 2023 08:21

Motivazione:

Insiemi	funzioni tra insiemi
Gruppi	omomorfismi di gruppi
⋮	
Spazi vettoriali $(V,+,\cdot)$	funzioni che "rispettano" $+,\cdot$ "Funzioni lineari"

Definizione V, W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$,

allora una funzione (insiemistica)
$f: V \longrightarrow W$
si dice "$\mathbb{K}$-lineare" o "(omo)morfismo" se soddisfa alle condizioni:

- $f(v+v') = f(v) + f(v')$ $\quad \forall v, v' \in V$
- $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

questo vale se:
$f(\alpha v + v') = \alpha f(v) + f(v')$
se $f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v')$

Conseguenze (abbastanza facili):

① $f(0_V)$? $\quad f(v+0) = f(v) \Rightarrow f(0_V) = 0_W$
$f(v) + f(0) \in W$
$(f(v)+f(0)) - f(v) = f(v) - f(v)$, $f(0) = 0_W$

② $f(-v)$? $\quad f(-v) = f((-1)v) = (-1) f(v) = -f(v)$

③ $f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(v_i)$ (induzione)
"l'image di una comb. lin. di vettori è la comb. lin. dei vetti immagine"

- $v_1, \dots, v_s$ sono l. dip. $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_s)$ sono lin. dip.
  $\left(\sum \alpha_i v_i = 0_V \text{ con } \exists i\ \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \sum \alpha_i f(v_i) = 0_W\right)$
  $f(\langle v_1, \dots, v_s \rangle) \subseteq \langle f(v_1), \dots, f(v_s) \rangle$
  (una dim $_{\mathbb{K}} \langle v_1, \dots, v_s \rangle \geq$ dim $_{\mathbb{K}} \langle f(v_1), \dots, f(v_s) \rangle$ in genere)
  $f(v_1), \dots, f(v_s)$ sono lin. indip $\Rightarrow v_1, \dots, v_s$ sono lin. indip.

Esempi:

① $id_V : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto id(v) = v$ è lineare (biiettiva!)
$0 : V \longrightarrow W$, $v \longmapsto 0_W$ è lineare

se $f: V \to W$ lineare, $g: W \to U$ lineare
allora $g \circ f : V \longrightarrow U$ è lineare
$g \circ f(\alpha v + v') = g(f(\alpha v + v'))$
$g(\alpha f(v) + f(v')) = \alpha g f(v) + g f(v')$
"composizione di funzioni lineari è lineare"

se $f: V \to W$ è lineare BIIETTIVA
allora l'inversa insiemistica $f^{-1}: W \to V$, $w \mapsto v : f(v) = w$
è lineare!
$g(\alpha w + w') \overset{?}{=} \alpha g(w) + g(w')$ [ipotesi $f(\alpha v + v') = \alpha f(v) + f(v')$]
PROBLEMA!

$g(\alpha w + w')$ è l'unico vettore $x \in V$ tale che $f(x) = \alpha w + w'$
ma se $g(w) = v$ (cioè $f(v) = w$), $g(w') = v'$ ($f(v') = w'$)
allora $f(\alpha v + v') = \alpha f(v) + f(v') = \alpha w + w'$
dunque $x = \alpha v + v'$
cioè $g(\alpha w + w') = \alpha v + v' = \alpha g(w) + g(w')$
e g risulta lineare!

② se $(v_1, \dots, v_n)$ è base (ordinata) di V
allora la funzione
$\alpha_v : V \longrightarrow V_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$, $v \longmapsto \alpha_v(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è lineare, biiettiva
tale che $v = \sum x_i v_i$
e l'inversa è:
$\beta : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum x_i v_i = \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
infatti:
$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \beta\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\right) = \sum (x_i + y_i) v_i = \sum x_i v_i + \sum y_i v_i = \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

③ se $W \leq V$ sottospazio allora:
c'è $i_W : W \longrightarrow V$, $w \longmapsto i_W(w) := w$ inclusione di W in V è lineare.
(iniettiva, non suriettiva se $V \neq W$)

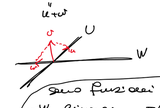
$\pi_W : V \longrightarrow V/W$, $v \longmapsto [v]_W = v + W$
proiezione sul quoziente V/W è lineare:
$[v + v'] = [v] + [v']$
$[\alpha v] = \alpha [v]$
(suriettiva, non iniettiva se $W \neq 0$)

$W \xrightarrow{i_W} V \xrightarrow{\pi_W} V/W$ lineare!
$w \longmapsto w \longmapsto [w] = [0]$
$\in W$

④ se $V = U \oplus W$ $\quad U, W \leq V$ $\quad (U \cap W = \langle 0 \rangle,\ U + W = V)$
(quindi $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$)
allora abbiamo proiezioni e simmetrie rispetto a U, W:

$\pi_U^W : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto \pi_U^W(v) := u$ (con $v = u + w$) $\quad$ e $\quad \pi_W^U : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto w$ (con $v = u + w$)

proiezione su U direzione W



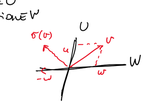
sono funzioni lineari:
π_U^W lineare: $\pi(v + v') = u + w' = \pi(v) + \pi(v')$
$v + v' = (u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w')$, $v = u + w$, $v' = u' + w'$

nota π_U^W manda a 0 tutti i vettori di W (non iniettiva!)
mi servono non suriettiva: immagine è solo U.

$V \xrightarrow{\pi_U^W} V \xrightarrow{\pi_W^U} V$, 0
$V \xrightarrow{\pi_U^W} V \xrightarrow{\pi_W^U} V$, π_U^W
$v = u + w \longmapsto u \longmapsto u$, $u + 0$

$\sigma_U^W : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto \sigma_U^W(v) := u - w$ (con $v = u + w$) $\quad$ $\sigma_W^U : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto -u + w$ (con $v = u + w$)

SIMMETRIA DI ASSE U E DIREZIONE W



sono funzioni lineari

Proprietà:
$\sigma_U^W \circ \sigma_U^W = id_V$
$\sigma_U^W = \pi_U^W - \pi_W^U$
$\sigma_W^U =$
$\pi_U^W + \pi_W^U = id_V$
$(v \longmapsto u - w$, $u + w$, $\pi_U^W(v)$, $\pi_W^U(v))$

composizioni?

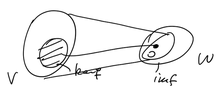
⑤ $V = \mathbb{K}[x]$ $\quad$ oppure $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabili}\}$
allora $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} : V \longrightarrow V$ è funzione lineare!
$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g)$
$\frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{d}{dx}(f)$

Sottospazi associati a $f: V \to W$ lineare
(e formula delle dim $\ker f$):

$f: V \longrightarrow W$ lineare

def: $\ker(f) := f^{\leftarrow}(0_W) = \{v \in V : f(v) = 0_W\} \leq V$ (sottospazio)
ker = KERNEL = nucleo

$\mathrm{im}(f) := f(V) = \{w \in W : w = f(v)\ \exists v \in V\}$
im = IMAGE = immagine $= \{f(v) : v \in V\} \leq W$



$\mathrm{im}(f) = W$ sse f suriettiva

$\ker(f) = \{0_V\}$ sse f iniettiva
$\Leftarrow$ anche perché $f(0) = 0$
($\Rightarrow$ perché lineare)

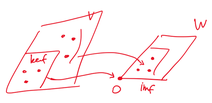
$f(v) = w$
$f(v + v') = f(v) + f(v') = w$
$\in \ker f$

fibra di $w \in W$ per f ($f^{\leftarrow}(w) \subseteq V$) è classe laterale di $\ker f$ oppure $\emptyset$.

per una funzione LINEARE tutte le fibre non VUOTE "si somigliano", sono classi laterali di un sottospazio ($\ker f$):
Riflettere sulle relazioni con i sistemi lineari:
$\ker(f)$ = soluzioni di sistema OMOGENEO
$f^{\leftarrow}(\{w\})$ = soluzioni di sistema non OMOG.
e il teorema di Rouché-Capelli

Supponiamo $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$ $\quad$ $f: V \to W$ lineare
allora $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$
(formula delle dimensioni per f lineare).

dimostrazione:
si parte da $v_1, \dots, v_s$ base $\ker f$ ($s = \dim_{\mathbb{K}} \ker f$)
si completa a una base di V:
$v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n$ base di V ($n = \dim_{\mathbb{K}} V$)
allora MOSTRIAMO che
$f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ è BASE per $\mathrm{im} f \leq W$
e allora $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{im} f) = n - s = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} \ker f$



devo mostrare che $f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)$ sono
- generatori per $\mathrm{im}(f)$
- lin. indip.

Generatori: se $w \in \mathrm{im}(f)$
$w = f(v)$ $\quad v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$
$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i)$
$= \sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i f(v_i) \in \langle f(v_{s+1}), \dots, f(v_n) \rangle$
quindi vettori in $\mathrm{im}(f)$ è combinazione

indipendenti: $\sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i f(v_i) = 0_W$
$f\left(\sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 0_W$
$\sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i v_i \in \ker(f) = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$
$\sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{s} \beta_i v_i$
$\sum_{i=1}^{s} (-\beta_i) v_i + \sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i v_i = 0_V$
ma $v_1, \dots, v_s, \dots, v_n$ erano BASE
dunque ($\beta_i = 0$ e) $\alpha_i = 0$ $\forall i$ //

13/11/2023

Riassunto: $f: V \longrightarrow W$ lineare/m
se $f(v + v') = f(v) + f(v')$ ($+ \text{ di } V$, $+ \text{ di } W$)
$f(\alpha v) = \alpha f(v)$
sse $f\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i f(v_i)$

Problemi: $v \in \langle S \rangle \leq V \Rightarrow f(v) \in \langle f(S) \rangle \leq W$ ($\not\Leftarrow$)

$U \leq V \Rightarrow f(U) \leq W$
$W \leq W \Rightarrow f^{\leftarrow}(W) \leq V$ $\{v \in V : f(v) \in W\}$
(es $W = \{0\}$ ....)

la funzione lineare f è completamente determinata quando conosciamo i valori di f su una BASE di V:

se conosco $f(v_1), \dots, f(v_n)$ con $v_1, \dots, v_n$ una BASE di V, allora conosco tutta f
$\forall v \in V$ $\quad f(v) = f\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i f(v_i)$

$f: V \longrightarrow W$ lineare
$\ker(f) = \{v \in V : fv = 0_W\} \leq V$
$\mathrm{im}(f) = \{f(v) : v \in V\} = \{w \in W : w = f(v) \text{ per qualche } v \in V\} \leq W$

$\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$ $\quad$ (se $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$)

Esempi:
① $id_V : V \to V$ $\quad \ker(id) = \{0\}$, $\mathrm{im}(id) = V$

② $W \leq V$: $\quad i : W \longrightarrow V$ $\quad \{\ker(i) = \{0\} = 0,\ \mathrm{im}(i) = W\}$
$\pi : V \longrightarrow V/W$, $v \longmapsto [v] = [v]$, $v \longmapsto [0]$ $\quad \{\ker(\pi) = W,\ \mathrm{im}(\pi) = V/W\}$
$\dim(\mathrm{im}(\pi)) = \dim V/W = \dim V - \dim W$

③ $V = U \oplus W$
$\pi_U^W : V \longrightarrow V$, $v = u + w \longmapsto u$, $w \in W$, $= 0 + w$, $u + 0 \longmapsto u$, $u + w$ $\quad \ker(\pi_U^W) = W$, $\mathrm{im}(\pi_U^W) = U$
$\sigma_U^W : V \longrightarrow V$, $v = u + w \longmapsto u - w$ $\quad \ker(\sigma_U^W) = 0$, $\mathrm{im}(\sigma_U^W) = V$

④ $\ker\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R} \leq \mathbb{R}[x]$ $\quad \mathrm{im}\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R}[x]$
$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

interessano: $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$, $g \circ f = 0$ sse $\mathrm{im}(f) \leq \ker(g)$
$v \longmapsto f(v) \longmapsto g(f(v))$, $f(v) \in \mathrm{im}(f)$, $g(f(v)) = 0$?

Conseguenze sulla formula delle dim per f:

$f: V \longrightarrow V$ (ENDOMORFISMI)

$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} f) = \dim(V)$ $\quad (< \infty)$

f iniettiva $\Leftrightarrow \ker(f) = 0$
$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\ker f) = 0$
$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{im} f) = \dim_{\mathbb{K}} V$ $\quad \mathrm{im} f \leq V$
$\Leftrightarrow \mathrm{im}(f) = V$
$\Leftrightarrow f$ suriettiva

Conclusione per endomorfismi $f: V \to V$ ($\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$) sono equivalenti:
- biettiva
- iniettiva
- suriettiva

Terminologia: V, W spazi vettoriali

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{\text{funzioni lineari } V \to W\}$ omomorfismi (tra V e W) — $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE	$\geq$	$\mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{\text{funzioni lineari biiettive } V \to W\}$ isomorfismi — c'è solo se $\dim V = \dim W$
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) = \{\text{funzioni lineari } V \to V\}$ endomorfismi — $\mathbb{K}$-algebra	$\geq$	$\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) = \{V \to V \text{ biiettivi}\}$ AUTOMORFISMI $\mathbb{K}$-lineari di V; $id_V \in$, $0 \notin$ — GRUPPO
che struttura algebrica hanno?		stessa domanda.

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ ha struttura di spazio vettoriale:

se $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ allora $f + g$ è definita: $(f+g) : V \to W$
$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$

se $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ allora $\alpha f : V \to W$
$(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$

cioè definisco $+$ e $\cdot$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ usando le op di W.

è facile vedere che $(\mathrm{Hom}(V,W), +, \cdot)$ è spazio vett sull $\mathbb{K}$.
(es. $(f+g)+h = f + (g+h)$ ....)

problema: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ $\quad \dim V, \dim W < \infty$
$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$
basta decidere $f(e_1), \dots, f(e_m) \in \mathbb{K}^n$ (base di $\mathbb{K}^m$)
cioè è nec. e suff. scegliere $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$ scrivere $= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \varepsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} \varepsilon_j$ dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ è base canonica di $\mathbb{K}^n$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \cong M_{n,m}(\mathbb{K})$
$f \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_m) \end{pmatrix}$ (n × m)

$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(W)$ //

e questa biiezione è funzione lineare;
conosciamo una base della matrice; qual è la base corrispondente di funzioni?

14/11/2023

V, W spazi vettoriali
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{f : V \to W \text{ lineari}\}$
$f + g$: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$
αf: $(\alpha f)(v) = \alpha \cdot f(v)$

$(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W), +, \cdot)$ è sp vettoriale
$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(W)$
$= \dim_{\mathbb{K}}(M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K}))$

$\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V \text{ lineari}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$
è sp. vett. dim $\dim(V)^2$
$\cong M_{\dim(V)}(\mathbb{K})$

ma c'è anche la composizione di funzioni
$V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V$, $g \circ f$

$(\mathrm{End}(V), +, \cdot, \circ)$ — anello non commutativo con unità
sp. vett.
- $id \circ f = f \circ id = f$
- $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$, $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$
- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

! $f \circ g \neq g \circ f$ (di solito)

$\longleftrightarrow M_n(\mathbb{K})$
$+ \longleftrightarrow +$
$\cdot \longleftrightarrow \cdot$
$\circ \longleftrightarrow$? PRODOTTO DI MATRICI: qual è operazione corrispondente alla composizione di funzioni...

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ è $\mathbb{K}$-algebra.
(il prodotto per gli scalari commuta con composizione: $(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g)$, $f \circ (\alpha g) = \alpha(f \circ g)$)

Problema: $V = U \oplus W$
$p = \pi_U^W : V \longrightarrow V$, $v = u + w \longmapsto u$ $\Rightarrow p^2 = p$

VICEVERSA:
p è proiezione di asse $\mathrm{im}(p)$ e direzione $\ker(p)$ $\Leftarrow$ se $p: V \to V$ tale che $p^2 = p$
cioè $V = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$
e $p = \pi_{\mathrm{im}(p)}^{\ker(p)}$

infatti per ogni $v \in V$ abbiamo
$v = \underbrace{p(v)}_{\in \mathrm{im}(p)} + \underbrace{(v - p(v))}_{\in \ker(p)}$
$p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = 0$, $p(v)$
(in modo unico)

quindi: $V = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$
inoltre la funzione $\pi_{\mathrm{im}(p)}^{\ker(p)}$ è l'unica funzione tale che
$v = u + w \longmapsto u = p(v)$
$p(v)$, $(v - p(v))$
quindi $\pi_{\mathrm{im}(p)}^{\ker(p)} = p$ //

Problema: simmetrie $V = U \oplus W$
$\sigma_U^W : V \longrightarrow V$, $v = u + w \longmapsto u - w$ $\Rightarrow$ $s \circ s = id_V$, $s^2 = id_V$
$s = \sigma_U^W$

VICEVERSA:
s è simmetria con V_+ = asse $= \{v \in V : sv = v\}$, V_- = direz $= \{v \in V : sv = -v\}$ (sono complementari) $\Leftarrow$ se $s: V \to V$ tale che $s^2 = id_V$ (se il campo $\mathbb{K}$ non è di caratteristica 2)
cioè $V = V_+ \oplus V_-$
e $s = \sigma_{V_+}^{V_-}$

Sappiamo $\forall v \in V$ $\quad v = v_+ + v_-$ con $v_+ \in V_+$, $v_- \in V_-$
$s(v) = s(v_+ + v_-)$
$= s(v_+) + s(v_-)$
$= v_+ - v_-$
$\Rightarrow \begin{cases} v = v_+ + v_- \\ s(v) = v_+ - v_- \end{cases}$
$\Downarrow$
si ricavano v_+ e v_- in modo unico:
$v_+ = \frac{v + s(v)}{2}$
$v_- = \frac{v - s(v)}{2}$

e si verifica $v_+ \in V_+$, $v_- \in V_-$, $s = \sigma_{V_+}^{V_-}$ //

15/11/2023