01-2144-52-ale-2
[illegible]

Richiamo: applicazioni lineari (e matrici)

$\forall\ V \longrightarrow W$ (notazione: ho già visto che $\dim V, \dim W$ finiti)

$\in \mathrm{Hom}(V,W)$ se $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$ (spazio vettoriale su $\mathbb{K}$) e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:

$T(\underline{v}+\underline{w}) = T(\underline{v}) + T(\underline{w})$

$T(\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot T(\underline{v})$

Se $V(\mathbb{K}, n) \supset \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V:

$\forall \underline{v} \in V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$ (combinazione lineare)

$\forall \underline{w} \in W = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \underline{w}_j$ (combinazione lineare)

$\forall T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ (applicazione lineare)

$T(\underline{v}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\underline{v}_i)$ (linearità)

$T(\underline{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \underline{w}_j$ ($a_{ji} \in \mathbb{K}$, $\underline{w}_j \in W$ non detti a caso ad hoc)

$T(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \underline{w}_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i\right) \underline{w}_j$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (matrice associata)

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) \cdot \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = \mathrm{Coord}_{\mathcal{C}}(T(\underline{v}))$

$\mathrm{Hom}(V,W) \supset \mathrm{Ker}(T) = \{\underline{v} \in V : T(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$ (nucleo)

$\mathrm{Hom}(V,W) \supset \mathrm{Im}(T) = \{\underline{w} \in W : \exists\, \underline{v} \in V,\ T(\underline{v}) = \underline{w}\}$ (immagine)

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(T) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_W)^{-1}$ (cambio di base)

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_W) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)^{-1}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(T) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_W) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$

Endomorfismi, diagonalizzazione

$\forall\ V \longrightarrow V$ (endomorfismo)

$\forall\ \mathcal{B}$ (base) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ (matrice associata)

Allora: $\forall$ (cambiamento di base) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(T) = P^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \cdot P$ (matrice coniugata)

$\forall\ V \longrightarrow V$ endomorfismo

Allora: $\exists$ (autovalore) $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0}_V$ (autovettore) tale che $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

$\exists$ base $\mathcal{B}$ di autovettori $\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ diagonale

Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso (ogni polinomio ha una radice in $\mathbb{K}$), allora T ha sempre un autovalore.

Se $\dim V = n$ e T ha n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile.

Sottospazi di V dati da T: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (scalare) $V_\lambda = \{\underline{v} \in V : T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\} = \mathrm{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}_V)$

$\forall\ V \longrightarrow V$ diverso da Id_V e $-\mathrm{Id}_V$ (altrimenti non serve fare niente)

$\forall$ autovalore λ di T (quindi $\exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$)

$\forall \underline{w} \in V$ linearmente indipendente da $\underline{v}$ (quindi $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ base di V)

$T(\underline{w}) = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

$A_T = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A_T - x \cdot \mathrm{Id}_2) = (\lambda - x)(a_{22} - x)$

$\det(A_T - x \cdot \mathrm{Id}_2) = 0 \iff x = \lambda \text{ oppure } x = a_{22}$

λ è autovalore di T (per costruzione)

a_{22} è autovalore di T $\iff a_{22} = \lambda$ oppure $a_{12} = 0$

$a_{12} = 0 \iff \underline{w} \in V_\lambda$

Quindi se λ è l'unico autovalore di T, allora T è diagonalizzabile $\iff V_\lambda = V$

Se $\dim V = 2$ e T ha due autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile.

Se $\dim V = n$ e T ha n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile.

Se $\dim V = n$ e T ha meno di n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile $\iff$ la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è n.

Se $\dim V = n$ e T ha meno di n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile $\iff$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è n e la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica.

Se $\dim V = n$ e T ha meno di n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile $\iff$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è n e per ogni autovalore λ la molteplicità algebrica è uguale a $\dim V - \mathrm{rk}(A_T - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n)$.

Se $\dim V = n$ e T ha meno di n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile $\iff$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è n e per ogni autovalore λ la molteplicità algebrica è uguale a $\dim V - \mathrm{rk}(A_T - \lambda \cdot \mathrm{Id}_n)$ e la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Se $\dim V = n$ e T ha meno di n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile $\iff$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è n e per ogni autovalore λ la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.

Se $\dim V = n$ e T ha meno di n autovalori distinti, allora T è diagonalizzabile $\iff$ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è n e per ogni autovalore λ la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica e