G1-234-33-alm-3
mercoledì 6 dicembre 2023 08:35

Oggi: ① teoremi isom. per sp. vett.
② dualità per spazi vettoriali

1° teorema isom.:

$\varphi : V \longrightarrow W$ lineare

allora φ induce un isomorfismo canonico

$\overline{\varphi} : V/\ker\varphi \longrightarrow \operatorname{im}\varphi$

tale che:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/\ker\varphi \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

è commutativo,

i.e.: $\varphi = i \circ \overline{\varphi} \circ \pi$

infatti:
- definizione di $\overline{\varphi}$: $\varphi = i\overline{\varphi}\pi \Rightarrow \varphi(v) = i(\overline{\varphi}(\pi(v))) =: \overline{\varphi}([v])$
- ben definita
- che è iso:

$\boxed{\overline{\varphi}([v]) := \varphi(v)}$

definita su $[v] \in V/\ker\varphi$ usando v rappresentante

se $[v]=[v']$ vero che $\overline{\varphi}([v]) = \overline{\varphi}([v'])$?

$\overline{\varphi}[v] = \varphi(v)$
$\overline{\varphi}[v'] = \varphi(v')$ ma $[v]=[v']$, $v-v' \in \ker\varphi$, $\varphi(v-v')=0$, $\varphi(v)-\varphi(v')=0$

lineare e biettiva (problema).

osservazioni:

① 1° teo isom $\Rightarrow$ formula dimensioni
($V/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$) $\not\Leftarrow$ $\dim V/\ker\varphi = \dim\operatorname{im}\varphi$
$\overset{\shortparallel}{\dim V - \dim\ker\varphi}$

② 1° teo iso permette di fattorizzare OGNI funzione con i φ π
iniettiva, suriettiva, biettiva
(pensare anche alle matrici!)

③ è vero se gli spazi hanno dim infinita?

2° teorema isomorfismo

V spazio vettoriale, $W_1, W_2 \leq V$

$$\begin{tikzcd} & W_1+W_2 \\ W_1 \arrow[ur, dash] & \\ & W_2 \arrow[ul, dash] \\ W_1\cap W_2 \arrow[uu, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \exists!$ isomorfismo $W_1/W_1\cap W_2 \xrightarrow{\overline{\varphi}} (W_1+W_2)/W_2$

tale che

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & W_1+W_2 \arrow[d, "\pi"] \\ W_1/W_1\cap W_2 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\pi\circ i = \varphi"] & (W_1+W_2)/W_2 \end{tikzcd}$$

è commutativo.

dimostrazione:
basta spiegare il 1° teorema iso:
alla mappa

$\boxed{W_1 \xrightarrow{\varphi} (W_1+W_2)/W_2}$ $(w_1 \longmapsto [w_1])$

perché $\ker\varphi = \{w_1 : [w_1]=[0]\} = \{w_1 : w_1 \in W_2\} = W_1\cap W_2$

$\operatorname{im}\varphi = (W_1+W_2)/W_2$

φ suriettiva perché:
$\boxed{[w_1+w_2]} = [w_1] \in$ immagine
(perché $(w_1+w_2)-w_1 = w_2 \in W_2$)

$W_1/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$
$W_1/W_1\cap W_2 \quad (W_1+W_2)/W_2$ //

$\overset{2° teo iso}{\Rightarrow}$ $\dim W_1/W_1\cap W_2 = \dim (W_1+W_2)/W_2$
$\overset{\shortparallel}{\dim W_1 - \dim(W_1\cap W_2)} \qquad \overset{\shortparallel}{\dim(W_1+W_2) - \dim W_2}$

$\Rightarrow$ formula di Grassmann
$\not\Leftarrow$

3° teorema di isomorfismo

V spazio vettoriale
$W_1 \leq W_2 \leq W_3 \leq V \Rightarrow \exists!$ isomorfismo $\dfrac{W_3/W_1}{W_2/W_1} \xrightarrow{\sim} W_3/W_2$

$$\begin{tikzcd} & V \\ W_3 \arrow[ur, dash] & \\ & W_2 \arrow[u, dash] \\ W_1 \arrow[uu, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

tale che:

$$\begin{tikzcd} W_3 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & W_3/W_2 = \boxed{} \\ W_3/W_1 = \boxed{} \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & [w]_{W_3} \end{tikzcd}$$

$[w]_{W_1}$ ben definita

dimostrazione:

$\varphi : W_3/W_1 \longrightarrow W_3/W_2$
$[w]_{W_1} \longmapsto [w]_{W_2}$
$\overset{\shortparallel}{w+W_1} \qquad \overset{\shortparallel}{w+W_2}$

$\ker\varphi = \{[w]_{W_1} : w \in W_3, [w]_{W_2} = [0]\}$
$= \{[w]_{W_1} : w \in W_2, w \in W_2\}$
$= \{[w]_{W_1} : w \in W_2\} = W_2/W_1$

$\operatorname{im}\varphi$ è W_3/W_2, cioè φ è suriettiva (ogni $[w]_{W_2}$ viene da $[w]_{W_1}$)

1° teo iso $\Rightarrow$ $\dfrac{(W_3/W_1)}{\ker\varphi} \simeq \operatorname{im}\varphi$
$\overset{\shortparallel}{(W_3/W_1)/(W_2/W_1)} \qquad \overset{\shortparallel}{W_3/W_2}$ //

che "formula" si può dedurre per le dimensioni?

Esercizio: se $V = U \oplus W$
allora $W \simeq V/U$
(sugg: $W \overset{i}{\hookrightarrow} V \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} V/U$, $?$)

DUALITÀ DI SPAZI VETTORIALI:

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$,
definiamo lo SPAZIO DUALE di V:

$\boxed{V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K}) = \{\varphi : V \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ lineare}\}}$
COVETTORI di V
sp. vettoriale con $+, \cdot_{\mathbb{K}}$

Vedremo: se $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ allora
$\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$
e se $v_1,\dots,v_n$ è base di V,
allora troviamo una "base duale" di V^*
che scriviamo $v_1^*,\dots,v_n^*$

(Nota: $V = V_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K}\right\} = M_{n,1}(\mathbb{K})$
allora
$(M_{n,1}(\mathbb{K}))^* \simeq V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \simeq M_{1,n}(\mathbb{K})$
base $\quad 1$)

$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$, allora $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \dim_{\mathbb{K}}\operatorname{Hom}(V,\mathbb{K}) = n\cdot 1 = n$.
(dim in dim 1)

Sia $v_1,\dots,v_n$ base di V
allora le funzioni $v_i^* : V \to \mathbb{K}$ $(v_i^* \in V^*)$
definite da:

$\boxed{v_i^*(v_j) := \delta_{ij} = \begin{cases}1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}}$ $\boxed{\mathbb{1}_n = (\delta_{ij})}$

sono n covettori e basta mostrare che sono lin. ind.,
corrispondono alle matrici riga:
$(1\,0\cdots0), (0\,1\,0\cdots0), \dots, (0\,0\cdots0\,1)$
$\alpha_{v,\{v\}}(v_1^*) \quad \alpha_{v,\{v\}}(v_2^*) \quad \dots$
quindi sono base di V^*.

Nota: v_i^* dipende da tutta la base $v_1,\dots,v_n$, non solo da v_1

Nota: V e V^* hanno la stessa dimensione,
quindi sono isomorfi: $(V \to V^*$, $v_i \mapsto v_i^*$, base $\to$ base, iso$)$ ← CAMBIA CAMBIANDO LA BASE!

ma non c'è iso canonico.

NOTA: falso in dim infinita ∞:
$(\mathbb{K}[x])^* \cong \mathbb{K}[[x]]$
$\mathbb{K}^{(A)} \Rightarrow (\mathbb{K}^{(A)})^* \cong \mathbb{K}^A = \{A \to \mathbb{K} \text{ qualsiasi}\}$
$\overset{\shortparallel}{\{A \to \mathbb{K} \text{ quasi ovunque } 0\}}$

V spazio vett $\rightsquigarrow V^*$ spazio vettoriale

$\varphi : V \to W$ lineare allora possiamo costruire una funzione lineare:

$\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$ funzione duale di φ o TRASPOSTA di φ

$\boxed{\varphi^*(\omega^*) := \omega^* \circ \varphi}$
$\omega^* \in W^*$
$\omega^* : W \to \mathbb{K}$
$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\omega^*} \mathbb{K}$

Nota: se ω^* corrisponde ad un iperpiano $H = \ker(\omega^*)$ di W, allora
$\varphi^*(\omega^*)$ è covettore di V che corrisponde all'iperpiano $\varphi^{-1}(H)$, iperpiano di V.

$\boxed{\text{Se } \varphi \text{ lineare } \overset{\leftarrow}{\varphi}(\text{iperpiano}) \text{ è iperpiano (o tutto?), mi viene } \varphi(\text{iperpiano}) \text{ di solito non è iperpiano!}}$

Osservazioni:

$\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*,V^*)$
$\varphi \longmapsto \varphi^*$

① φ lineare $\Rightarrow \varphi^*$ lineare: $\varphi^*(\alpha\omega^* + \omega'^*) = \alpha\varphi^*(\omega^*) + \varphi^*(\omega'^*)$

② $\varphi \mapsto \varphi^*$ è lineare: $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$
$(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$

③ composizioni: $(id_V)^* = id_{V^*}$
$(\varphi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*$
$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, $\varphi\circ\psi$
$(\varphi\circ\psi)^*(\xi)$ $(\xi \in W^*)$
$\xi\circ\varphi\circ\psi$
$\varphi^*(\xi)\circ\psi$
$\psi^*(\varphi^*(\xi))$
$(\psi^*\circ\varphi^*)(\xi)$

④ se $A = \alpha_{v,w}(\varphi)$ (v base V, w base W)
$\overset{\shortparallel}{(a_{ij})}$
allora
$\alpha_{w^*,v^*}(\varphi^*) = A^t = (a_{ji})$

$A = \boxed{\equiv}$ $\quad A^t = \boxed{\parallel}$

$\boxed{\begin{aligned} M_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{n,m}(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto A^t \end{aligned}}$

$\boxed{(A^t)^t = A}$
$\mathbb{1}_n^t = \mathbb{1}_n$
$0^t = 0$
$(AB)^t = B^tA^t$

$(\varphi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*$

$\boxed{(\varphi^*)^* = \varphi \ ?}$
$\varphi : V \to W$
$\varphi^* : W^* \to V^*$
$(\varphi^*)^* : (V^*)^* \to (W^*)^*$

mi aspetto: sia $A = (a_{ij}) = \alpha_{v,w}(\varphi)$
cioè $(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n)) = (w_1,\dots,w_n)A$
vogliamo calcolare $\alpha_{w^*,v^*}(\varphi^*) = (b_{hk})$
cioè per ogni w_i^* della base duale di W
vogliamo calcolare
$\varphi^*(w_k^*) \in V^*$
$= \sum_{h=1}^{n} (b_{hk}) v_h^*$
$?\ (a_{kh})$

$(\varphi^*(w_k^*))(v_\ell) = \left(\sum_{h=1}^{n} (b_{hk}) v_h^*\right)(v_\ell)$
$\overset{\shortparallel}{(w_k^*\circ\varphi)(v_\ell)} = \sum_{h=1}^{n} b_{hk}\, \underbrace{v_h^*(v_\ell)}_{\delta_{h\ell}} = b_{\ell k}$
$w_k^*(\varphi(v_\ell))$
$w_k^*\left(\sum_{s=1}^{m}(a_{s\ell})w_s\right)$
$\sum_{s=1}^{m} a_{s\ell}\, \underbrace{w_k^*(w_s)}_{\delta_{ks}} = a_{k\ell}$ //

06/12/2023

Prossima volta: teorema di BIDUALITÀ
e teorema di ORTOGONALITÀ.

Riassunto: V spazio vettoriale $\rightsquigarrow V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$
vettori, covettori

$\xi \in V^*$
$\xi : V \to \mathbb{K}$
$\xi \neq 0 \to \ker(\xi) \lneq V$ iperpiano

$\{\text{iperpiani di } V\} \simeq (V^* \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$

(Se $V = V_n(\mathbb{K}) = M_{n,1}(\mathbb{K})$ allora $V^* \simeq M_{1,n}(\mathbb{K})$
$v \in \ker(\xi)$ sse $\xi(v) = 0$)

$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$
e $v_1,\dots,v_n$ base V $\quad$ e $v_1^*,\dots,v_n^*$ base V^*
(base DUALE di $v_1,\dots,v_n$) $\quad v_i^* : V \to \mathbb{K}$, $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

se $\varphi : V \to W$ lineare su $\mathbb{K}$,
abbiamo
$V^* \xleftarrow{\varphi^*} W^*$ DUALE o TRASPOSTA di φ
definita da: $W \xrightarrow{\omega^*} \mathbb{K}$, $V \xrightarrow{\varphi} W$, $\omega^*\circ\varphi = \varphi^*(\omega^*)$
$\varphi^*(\omega^*) = \omega^*\circ\varphi$.

① $id_V^* = id_{V^*}$
② $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$
③ v base V, w base W, v^* base V^*, w^* base W^*: $\alpha_{w^*,v^*}(\varphi^*) = \alpha_{v,w}(\varphi)^t$
TRASPOSTA

$V \xrightarrow{\varphi} W$ (n, m) $\rightsquigarrow W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$ (m, n)
$\alpha(\varphi) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \xrightarrow{t} \alpha(\varphi^*) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$

$A \longmapsto A^t$
$\mathbb{1}_n \longmapsto \mathbb{1}_n^t = \mathbb{1}_n$
$BA \longmapsto (BA)^t = A^tB^t$
$\boxed{A^{tt} = A}$

$(\varphi^*)^* ?$
$V \xrightarrow{\varphi} W \rightsquigarrow W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^* \rightsquigarrow V^{**} \xrightarrow{\varphi^{**}} W^{**}$
$\overset{\shortparallel}{\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*,\mathbb{K})} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K}),\mathbb{K})$ (!)

Nota: tra V e V^* non ci sono funzioni canoniche.
ma abbiamo due funzioni canoniche:

① DUALITÀ: $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ $\quad = \langle v, v^*\rangle$ "bracket"
$(v, v^*) \longmapsto v^*(v) = \langle v, v^*\rangle = v\circ v^* = v^*\circ v$
$v \in V$, $v^* \in V^*$, $v^* : V \to \mathbb{K}$

è bi-lineare: lineare su un argomento fissato e basta
$\langle v, \alpha v^* + v'^*\rangle = \alpha\langle v, v^*\rangle + \langle v, v'^*\rangle \leftarrow (\alpha v^* + v'^*)(v) = \dots$
$\langle \alpha v + v', v^*\rangle = \alpha\langle v, v^*\rangle + \langle v', v^*\rangle \leftarrow v^*(\alpha v + v') = \alpha v^*(v) + v^*(v')$

non degenere: $v^*(v) = 0\ \forall v \Rightarrow v^* = 0$ $\quad (\langle v, v^*\rangle = 0\ \forall v \Rightarrow v^* = 0$
$v^*(v) = 0\ \forall v^* \Rightarrow v = 0$ $\quad \langle v, v^*\rangle = 0\ \forall v^* \Rightarrow v = 0)$

dato $\varphi : V \to W$ $\quad (\varphi^* : W^* \to V^*)$
allora $(\varphi^*)^* : V^{**} \to W^{**}$
$$\begin{tikzcd} V^{**} \arrow[r] & W^{**} \\ V \arrow[u, "e_V"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \arrow[u, "e_W"'] \end{tikzcd}$$
dà un diagramma commutativo,
cioè
$e_W\circ\varphi = \varphi^{**}\circ e_V$
$V \to W^{**}$

questo dà una identificazione canonica:
$\operatorname{Hom}(V^{**}, W^{**})$ con $\operatorname{Hom}(V,W)$
$\varphi^{**} = \Phi \longleftrightarrow e_W^{-1}\circ\Phi\circ e_V$ //

② BIDUALITÀ:
$e : V \longrightarrow (V^*)^*$ $\quad e(v)$
endomorfismo $\quad v \longmapsto (V^* \to \mathbb{K})$, $v^* \mapsto v^*(v)$ $\quad (e(v))(v^*) := v^*(v)$

è funzione lineare $\quad e(\alpha v + v') = \alpha(e(v)) + e(v')$

se $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ allora è isomorfismo.

perché $\dim V = \dim V^*$ e $\ker(e) = 0$
infatti $\ker(e) = \{v \in V : e(v) = 0\}$
$= \{v \in V : e(v)(v^*) = 0\ \forall v^*\}$
$= \{v \in V : v^*(v) = 0\ \forall v^*\}$
$= \{0\}$.

(e è sempre iniettiva)

ORTOGONALITÀ tra V e V^*:

dato $S \subseteq V$ (oppure anche $S \subseteq V$)
definiamo:

$S^\perp := \{\xi \in V^* : \xi(v) = 0\ \forall v \in S\}$
$= \{\xi \in V^* : \xi(S) = 0\} \leq V^*$
sottospazio

$\xi(S) = 0 \Leftrightarrow \ker(\xi) \geq S$
dunque $S^\perp$:= covettori degli iperpiani che CONTENGONO S
= "iperpiani contenenti S"

funzione $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\perp} \mathbb{P}(V^*)$
sottospazi V $\quad$ sottospazi V^*

è ANTI ISOMORFISMO INVOLUTIVO di RETICOLI:
① $S \leq T$ sse $S^\perp \geq T^\perp$
② S sottospazio: $(S^\perp)^\perp = S$ $\quad$ ($\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\perp} \mathbb{P}(V^*)$, $S \mapsto S^\perp$; $\mathbb{P}(V^*) \xrightarrow{\perp} \mathbb{P}(V)$, $T \longmapsto T^\perp := \{v \in V : \xi(v) = 0\ \forall \xi \in T\}$)
③ $(S+T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$, $(S\cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$ } scambia int/sup dei due reticoli
④ $\langle 0\rangle^\perp = V^*$, $V^\perp = \langle 0_{V^*}\rangle$
⑤ $\dim_{\mathbb{K}}(S^\perp) = n - \dim_{\mathbb{K}}(S)$
($n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$)
infatti se $v_1,\dots,v_r$ base di S,
allora $S^\perp$ è definito da un sistema lineare in n incognite e di rango r:
$\begin{cases}\xi(v_1) = 0 \\ \vdots \\ \xi(v_r) = 0\end{cases}$, dunque lo spazio delle soluzioni ha dim $n-r$ //

problema: esplicitare le dimostrazioni di queste proprietà:
es: (1) $S \leq T \Rightarrow$ se $\tau \in T^\perp$: $\tau(v) = 0\ \forall v \in T$, ma $S \leq T$
$\Rightarrow \tau(v) = 0\ \forall v \in S$
$\Rightarrow \tau \in S^\perp$
$\Rightarrow T^\perp \leq S^\perp$ //
"$\Leftarrow$" $T^\perp \leq S^\perp \Rightarrow T^{\perp\perp} \geq S^{\perp\perp}$
$T \qquad S$

(2) $S \overset{?}{=} S^{\perp\perp}$ = vettori di V annullati da tutti i covettori che annullano S
e hanno la stessa cosa!

③ una delle frecce è facile,
l'altra si fa per bidualità!
$(S+T)^\perp = \{\xi \mid \xi(v+w) = 0\ \forall v \in S, w \in T\}$
$= \{\xi \mid \xi(S) = 0, \xi(T) = 0\}$
$= S^\perp \cap T^\perp$
poi si applica $\perp$:
$(S+T)^{\perp\perp} = (S^\perp \cap T^\perp)^\perp$
usando $S^{\perp\perp}$ al posto di S, $T^{\perp\perp}$ al posto di T:
$S^\perp + T^\perp = (S^{\perp\perp} \cap T^{\perp\perp})^\perp = (S\cap T)^\perp$ //

Applicazioni:

$\varphi : V \to W$ ($\operatorname{im}\varphi$, $\operatorname{im}\varphi$), $\quad \varphi^* : W^* \to V^*$, $\omega^* \mapsto \varphi^*(\omega^*) := \omega^*\circ\varphi$

$\ker(\varphi^*) = \{\omega^* \in W^* : \varphi^*(\omega^*) = 0\}$
$= \{\omega^* \in W^* : \omega^*\circ\varphi = 0\}$
$= \{\omega^* \in W^* : \omega^*(\operatorname{im}\varphi) = 0\}$
$= (\operatorname{im}(\varphi))^\perp \leq W^*$

funzione 0: $\omega^*(\varphi(v)) = 0\ \forall v$ ← $\operatorname{im}\varphi$

$\operatorname{im}(\varphi^*)$? $\quad \ker((\varphi^*)^*) = (\operatorname{im}(\varphi^*))^\perp$
applicando $\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi)^\perp$ a φ^*
$\ker(\varphi)$
$\ker(\varphi)^\perp = (\operatorname{im}\varphi^*)^{\perp\perp} = \operatorname{im}\varphi^*$

dunque $\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi)^\perp \leq W^*$
$\operatorname{im}(\varphi^*) = \ker(\varphi)^\perp \leq V^*$

In particolare: φ iniettiva $\Leftrightarrow \varphi^*$ suriettiva
($\ker\varphi = 0 = \ker(\varphi^*) = V^*$, $\operatorname{im}(\varphi^*)$)
φ suriettiva $\Leftrightarrow \varphi^*$ iniettiva

$V \rightsquigarrow V^*$

$W \leq V \rightsquigarrow W^*$? $\quad Y/W \rightsquigarrow (Y/W)^*$? $\quad V \times W \rightsquigarrow (V\times W)^* = V^* \times W^*$ $\quad \operatorname{Hom}(V,W) \rightsquigarrow (\operatorname{Hom}(V,W))^*$ $\boxed{\text{difficile!}}$

$\rightsquigarrow W \leq V$: $W \overset{i}{\hookrightarrow} V \Rightarrow V^* \xrightarrow{i^*} W^*$, $\operatorname{im} i^* = W^*$, $\ker i^* = \omega(i)^\perp = W^\perp$ $\overset{\text{Idea}}{\Rightarrow}$ $\boxed{V^*/W^\perp \simeq W^*}$

$\rightsquigarrow W \leq V$: $V \xrightarrow{\pi} V/W$, $W \xrightarrow{0} V/W$ $\Rightarrow (V/W)^* \xrightarrow{\pi^*} V^*$, $0 \equiv$ $\Rightarrow$ $(V/W)^*$ sottospazio di V^*, $\operatorname{im}(\pi^*) \subseteq \ker(i^*) = W^\perp$ $\quad$ oppure: $(V/W)^* \simeq \operatorname{im}(\pi^*) = (\ker\pi)^* = W^\perp$

$\boxed{(V/W)^* \simeq W^\perp \leq V^*}$
perché $i^*\circ\pi^* = 0$
quindi $\operatorname{im}(\pi^*) \subseteq \ker(i^*)$
e hanno stessa dimensione:
$\dim(\operatorname{im}(\pi^*)) = \dim((\ker\pi)^\perp) = n - \dim(\ker\pi) = n - \dim(W)$
$\dim(\ker(i^*)) = \dim((\operatorname{im} i)^\perp) = n - \dim(\operatorname{im} i) = n - \dim(W)$

Problemi non banali:

① teoremi di iso nel duale?
$V \xrightarrow{\varphi} W$, $\boxed{V/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi}$ $\quad W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$
$(V/\ker\varphi)^* \simeq (\operatorname{im}\varphi)^*$ $\quad W^*/\ker\varphi^* \simeq \operatorname{im}(\varphi^*)$
$\overset{\shortparallel}{W^*/\operatorname{im}(\varphi)^\perp} \qquad \overset{\shortparallel}{\ker(\varphi)^\perp}$
$\overset{\shortparallel}{(\operatorname{im}\varphi)^*} \qquad \overset{\shortparallel}{(V/\ker\varphi)^*}$

solo per EEA (esercizietti aperti aberrati)

② $W_1 \leq W_2 \leq V$
$(W_2/W_1)^* \simeq W_1^\perp/W_2^\perp$
in modo canonico!
$[(V/W)^* = W^\perp/V^\perp = W^\perp/0 = W^\perp]$

11/12/2023