G1-234-3e

mercoledì 29 novembre 2023 07:54

Esercizi su applicazioni lineari e matrici

① $V = K[x]_{\leq 4}$ con base canonica $1, x, x^2, x^3, x^4$

$D: V \to V$ "derivazione rispetto a x" : $D = \frac{d}{dx}$

scrivere la matrice in base canonica, e calcolare le potenze $D^2, D^3, D^4, \ldots$

$D: K[x]_{\leq 4} \to K[x]_{\leq 4}$

$e_1 = 1 \longmapsto 0$
$e_2 = x \longmapsto 1 = e_1$
$e_3 = x^2 \longmapsto 2x = 2e_2$
$e_4 = x^3 \longmapsto 3x^2 = 3e_3$
$e_5 = x^4 \longmapsto 4x^3 = 4e_4$

$$\alpha_\mathcal{E}(D) = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&4\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\ker(D) = \langle 1 \rangle$ (dim 1)

$\mathrm{im}(D) = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ (dim 4)

$D^2(x^i) = i(i-1)x^{i-2}$ matrice $\alpha_\mathcal{E}(D^2) = \alpha_\mathcal{E}(D)^2 = \begin{pmatrix} 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&12\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$D^3(x^i) = i(i-1)(i-2)x^{i-3}$ $\alpha_\mathcal{E}(D)^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&24\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$D^4(x^i) = i(i-1)(i-2)(i-3)x^{i-4}$ $\alpha_\mathcal{E}(D)^4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&24\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$D^5(x^i) \equiv 0$

② Ricordare le definizioni di proiezioni/simmetrie:

se $V = U \oplus W$ allora $\pi_U^W : V \to V$, $v \longmapsto u$, $v = u + w$ ($u \in U$, $w \in W$), π_W^U ?

e $\sigma_U^W : V \to V$, $v \longmapsto u - w$, σ_W^U ?

e relazioni tra loro.

$$\begin{cases} \pi_U^W + \pi_W^U = id \\ \sigma_U^W = \pi_U^W - \pi_W^U = \pi_U^W - (id - \pi_U^W) = 2\pi_U^W - id \\ \sigma_W^U = -\sigma_U^W \end{cases}$$

Se $V = K^4$, $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

calcolare le matrici in ~~base canonica~~ base canonica di $\pi_U^W, \pi_W^U, \sigma_U^W, \sigma_W^U$, e verificare che $\pi^2 = \pi$, $\sigma^2 = id$.

Trovare tutte le inverse destre/sinistre delle π, σ, e tutti i divisori di 0 destri/sinistri delle π, σ.

Calcolo l'immagine per π_U^W di un vettore qualsiasi $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{W} \Rightarrow \pi_U^W\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

trovo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (in funzione delle x_i) dal sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = x_1 \\ \alpha_1 = x_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = x_4 \end{cases} \ldots \text{risolvo sistema} \ldots \begin{cases} \alpha_1 = x_2 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \end{cases}$$

dunque $\pi_U^W\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ -1/2&1/2&1/2&1/2\\ -1/2&1/2&1/2&1/2 \end{pmatrix}}_{\alpha_\mathcal{E}(\pi_U^W)} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \quad //$$

③ Trovare esempi di matrici quadrate $A \in M_n(K)$ tali che: (n preferito, minimo se possibile)

- $A \neq 0$, $A^2 = 0$ — $e_1 \mapsto 0$, $e_2 \mapsto e_1$ matrice $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$
- $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 = 0$ — $e_1 \mapsto 0$, $e_2 \mapsto e_1$, $e_3 \mapsto e_2$ matrice $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ ce ne sono 2x2?
- $A \neq \mathbb{1}$, $A^2 = \mathbb{1}$ (simmetrie)
- $A \neq \mathbb{1}$, $A^2 \neq \mathbb{1}$, $A^3 = \mathbb{1}$
- $A^2 = A$ (proiezioni) (nota: $A^2 = A \iff A^2 - A = 0 \iff A(A - \mathbb{1}) = 0$ ma ~~non si può dedurre~~ NON SI PUÒ DEDURRE $A = 0$ oppure $A - \mathbb{1} = 0$)
- $A^2 \neq A$, $A^3 = A$ — $A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ... $A = \begin{pmatrix}0&\\1&-1\end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}0&\\&-1\end{pmatrix}$ ce ne sono 2x2?
- $A^3 = \mathbb{1}$, $A^2 = 0$
- $A^3 = \mathbb{1}$, $A^2 = A$

impossibile

Conviene spesso pensare alle funzioni lineari:
per esempio $A^3 = \mathbb{1}$, $A^2 \neq \mathbb{1}$:
matrici 2x2 complesse $\begin{pmatrix}1&0\\0&\omega\end{pmatrix}$ con $\omega^3 = 1$ ($\omega \neq 1$)
2x2 reali $\begin{pmatrix}-c&-s\\s&-c\end{pmatrix}$ con $c = |\cos\frac{2\pi}{3}|$, $s = |\sin\frac{2\pi}{3}|$
"rotazione di $2\pi/3$" fatta 3 volte è identità
3x3 reali con permutazioni (3-ciclo):
$e_1 \longmapsto e_2$, $e_2 \longmapsto e_3$, $e_3 \longmapsto e_1$ matrice $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

⊛ Dato $V = U \oplus W$ con $U, W \leq V$,

c'è un isomorfismo canonico

$W \to V/U$ (sugg.: è $W \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/U$).

Fissato $U \leq V$, se W, W' sono complementari di U ($V = U \oplus W$, $V = U \oplus W'$) allora c'è un isomorfismo (che dipende da U) tra W e W'.

Usare questo per dimostrare che c'è una biezione tra

$\{W : W \text{ è complementare di } U\}$ e $\mathrm{Hom}_K(W, U) \cong \mathrm{Hom}_K(V/U, U)$

complementare fissato

Dato $V = U \oplus W$ con $U, W \leq V$
abbiamo il morfismo composto $W \xrightarrow{\text{inclusione}} V \xrightarrow{\text{proiezione}} V/U$, φ e $\ker\varphi = \{w \in W \mid [w]_U = 0\}$
$= \{w \in W \mid w \in U\} = W \cap U = 0$
dunque φ iniettivo, poi $\dim V/U = \dim V - \dim U = \dim W$,
dunque gli spazi hanno stessa dimensione,
quindi φ è anche suriettivo

Naturalmente c'è anche $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/W$ ($\cong$).

Se abbiamo $V = U \oplus W = U \oplus W'$ allora abbiamo $W \xrightarrow[\cong]{\varphi} V/U \xleftarrow[\cong]{\varphi'} W'$

e abbiamo una funzione $W \dashrightarrow W'$, $w \mapsto [w]_U = [w']_U \mapsto w'$ } significa che ($\forall w \in W$) $w' - w \in U$, $w' = w + u$ con $u \in U$ (che dipende da w)

allora usiamo $W \xrightarrow{\psi} U$, $w \longmapsto u = \psi(w)$: • è lineare? • come si trova W' a partire da W e ψ? $= \{w + \psi(w) \mid w \in W\}$ //

// NON FACILE, TEORICO!

⊛⊛ per $W \leq V$ ricordiamo $W^* \cong V^*/W^\perp$
$(V/W)^* \cong W^\perp \leq V^*$

se $W_1 \leq W_2 \leq V$,

chi è $(W_2/W_1)^*$?

chi è $(W_2/W_1)^\perp$? (NOTA: $\frac{W_2}{W_1} \leq V/W_1$: dunque $(W_2/W_1)^\perp$ sottospazio di $(V/W_1)^* = W_1^\perp$)

⊛⊛⊛ $\varphi : V \to W$ lineare

φ iniettiva sse φ ha inversa sinistra
sse φ non ha divisori destri di 0
sse $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

valgono anche per funzioni insiemistiche sì!

φ suriettiva sse φ ha inversa destra
sse φ non ha divisori sinistri di 0
sse $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$

⊛⊛⊛ Gauss:

se $A = {}_n\boxed{}^m$ e $n \geq m$, $m = \mathrm{rg}A$

$A \underset{\text{Gauss righe}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 \ldots 0 \\ 0 \ldots 1 \\ 0 \end{pmatrix} = HA = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} A$

$$\begin{cases} H_1 A = \mathbb{1}_m \\ H_2 A = 0 \end{cases}$$

TROVARE TUTTE LE INV. SX DI A
E TUTTI I DIV. SX DI 0 DI A } questi 2 problemi sono legati : se $BA = \mathbb{1}_n$ e $CA = 0_n$ allora $(B+C)A = \mathbb{1}_n$
se $BA = \mathbb{1}_n$, $B'A = \mathbb{1}_n$ allora $(B - B')A = 0_n$

---

se $A = {}_n\boxed{}^m$ e $n \leq m$, $n = \mathrm{rg}A$

come trovare le inv. dx e i div. 0 dx di A?

---

cosa dire in generale se $\mathrm{rg}(A) = r < \min(n, m)$?