Motivazioni per DETERMINANTI:

① $A \in M_n(\mathbb{K})$: $AX = b$ sistema lin. □
$\rightsquigarrow$ risolvere
$x_1 = f_1(A,b)/f(A)$
$x_2 = f_2(A,b)/f(A)$
⋮
$x_n = f_n(A,b)/f(A)$
↑ stesso denominatore! Σ di n! termini con segno dei prodotti.

② $v_1, \dots, v_n \in V_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$,
come posso capire se sono linearip? o lin. dip.?

sse $A = (v_1 \dots v_n)$ il sistema $AX = \underline{0}$ ha unica soluzione $\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$
sse $\det(A) \neq 0$

③ calcolo di equazioni CARTESIANE di SOTTOSPAZI
V lin, $H = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ iperpiano

equazione di H: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; v_1 \dots v_{n-1}$ ha rango $n-1$

$\det \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; v_1 \dots v_{n-1} \Big) = 0$ ↕ n

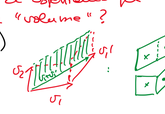
④ il calcolo dei determinanti è il calcolo di VOLUMI n-dimensionali:

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n = V_n(\mathbb{R})$
box

$\mathbb{R}^2$
$\{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in [0,1]\}$

$\boxed{\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_n) \; ?}$ che proprietà ci aspettiamo per la funzione "volume"?

multiplicare i "lati" per $\alpha \in \mathbb{K}$
① $\mathrm{vol}(\alpha v_1, v_2, \dots, v_n) = \alpha(\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_n))$
$\mathrm{vol}(v_1, \alpha v_1, \dots, v_n)$



uguali area (2-volume) perché "stessa base/altezza".

sommare i "lati"
② $\mathrm{vol}(v_1 + v_1', v_2, \dots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) + \mathrm{vol}(v_1', v_2, \dots, v_n)$

③ $\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots) = 0$ perché "non c'è" volume n-dimensionale

Vedremo che funzioni con queste proprietà ce ne sono "poche": solo una se chiediamo $\mathrm{vol}(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{CUBO UNITARIO}}) = 1$ //

11/12/2023

Definizione: V spazio vett su $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

una funzione $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \xrightarrow{\delta} \mathbb{K}$

si dice n-multilineare se:
- è lineare in ogni argomento (vettore) bloccati gli altri argomenti:

cioè: $\delta(v_1, \dots, \underbrace{\sum_j \alpha_j w_j}_{i\text{-esima}}, \dots, v_n) = \sum_j \alpha_j \, \delta(v_1, \dots, \underbrace{w_j}_{i\text{-esima}}, \dots, v_n)$

per ogni posizione i-esima

si dice ALTERNANTE se
- si annulla quando due argomenti sono uguali

cioè: $\delta(v_1, \dots, v_n) = 0$ se $v_i = v_j$ per $i \neq j$ $(\forall i, j)$

Osservazioni:
- se δ è funzione 2-multilineare (= bilineare) allora

$\delta(v_1 + v_2, u_1 + u_2) = \delta(v_1, u_1 + u_2) + \delta(v_2, u_1 + u_2)$
$= \delta(v_1, u_1) + \delta(v_1, u_2) + \delta(v_2, u_1) + \delta(v_2, u_2)$

$\neq \delta(v_1, u_1) + \delta(v_2, u_2)$
$\neq \delta(v_1 + v_2, u_1 + u_2)$

$\delta(\alpha v_1, \beta v_2) = \alpha\beta \, \delta(v_1, v_2)$
$\delta(\alpha v_1, \alpha v_2) = \alpha^2 \delta(v_1, v_2)$

- alternante $\Longrightarrow$ antisimmetrica
$\delta(v_1, \dots, v_n) = 0$ se $v_i = v_j$ per $i \neq j$

$\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$

infatti $\delta(v_1, \dots, \underset{i\text{-esimo}}{v_i + v_j}, \dots, \underset{j\text{-esimo}}{v_i + v_j}, \dots, v_n) = 0$
$= \cancel{\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n)} + \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$
$+ \delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) + \cancel{\delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n)}$
$\Rightarrow \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$ //

è vero (antisim $\Rightarrow$ alternante) in car $\neq 2$

$\delta(v_1, \dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{v}, \dots, v_n) = -\delta(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n)$
$a = -a$
$2a = 0$ se $2 \neq 0$ allora $a = 0$ //

all'insieme $\{\delta : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ volte "dim } V} \to \mathbb{K} \mid \text{n-lineari alternanti}\} = \underline{\text{n-LinAlt}(V)}$
"FORME n-lineari alternanti"

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
con operazioni: $(\alpha\delta)(v_1, \dots, v_n) = \alpha \cdot \delta(v_1, \dots, v_n)$
$(\delta_1 + \delta_2)(v_1, \dots, v_n) = \delta_1(v_1, \dots, v_n) + \delta_2(v_1, \dots, v_n)$

Teorema: $\dim_{\mathbb{K}} \text{n-linalt}(V) = 1$ se $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$

precisamente se $e_1, \dots, e_n$ è base di V allora la funzione
$\text{n-linalt}_{\mathbb{K}}(V) \longrightarrow \mathbb{K}$
$\delta \longmapsto \delta(e_1, \dots, e_n)$
è un ISOMORFISMO di spazi vettoriali!

dimostrazione: certamente la funzione $(\delta \mapsto \delta(e_1, \dots, e_n))$ è lineare e vogliamo mostrare che il valore $\delta(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K}$ determina completamente TUTTA la funzione δ:
siano $v_1, \dots, v_n \in V$ qualsiasi, $\boxed{(v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n) A}$
calcoliamo

$\delta(v_1, \dots, v_n) =$
$= \delta\left(\sum_i a_{i1} e_i, \sum_i a_{i2} e_i, \dots, \sum_i a_{in} e_i\right)$

$\begin{cases} v_1 = \sum_i a_{i1} e_i \\ v_2 = \sum_i a_{i2} e_i \\ \vdots \\ v_n = \sum_i a_{in} e_i \end{cases}$

$= \delta\left(\sum_{i_1} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2} a_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} a_{i_n n} e_{i_n}\right)$

$\boxed{n^n \text{ addendi!}}$

$= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} \dots \sum_{i_n} a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \cdot \underbrace{\delta(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})}_{\neq 0 \text{ solo se } \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}}$

(!)

$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{a_{\sigma(1),1} \, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}}_{\text{prendo 1 termine su } \{1, \dots, n\}} \cdot \delta(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(n)})$
$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

$= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \cdot \underbrace{(-1)^{\#\text{scambi } \sigma}}_{\text{segno } \sigma} \, \delta(e_1, \dots, e_n)$

$\boxed{\delta(v_1 \dots v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i),i}\right) \cdot \delta(e_1, \dots, e_n)}$ ⊗ formula fondamentale

$\Rightarrow$ se $\delta_1(e_1 \dots e_n) = \delta_2(e_1 \dots e_n) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2$
quindi la funzione $\delta \mapsto \delta(e_1 \dots e_n)$ è iniettiva!
suriettiva di conseguenza: basta usare ⊗ con $\delta(e_1 \dots e_n) = 1$ e otteniamo $\delta \neq 0$ //

EE: (esercitarsi esperti!)
V spazio vett, W sp. vett $/\mathbb{K}$,
$\text{n-lin}(V, W) = \{\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \to W \mid \text{n-lineari}\}$
$\text{n-linalt}(V, W) = \{\underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \to W : \text{n-lineari alternanti}\}$

sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$,
calcolare la dimensione!
noi restringiamo solo $\text{n-linalt}_{\dim V}(V, \mathbb{K})$ //

Morale della dimostrazione:
se decido che $\delta(e_1, \dots, e_n) = \alpha \in \mathbb{K}$,
allora esiste una unica funzione n-lin-alternante δ tale che $\delta(e_1, \dots, e_n) = \alpha$,
ed è definita sui vettori $v_1, \dots, v_n$ tali che $(v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n)(a_{ij})$
tale che
$\delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i),i}\right) \delta(e_1, \dots, e_n)$ //

Questo dà l'isomorfismo $\text{n-linalt}(V) \cong \mathbb{K}$
$\delta \longleftrightarrow \delta(e_1, \dots, e_n)$ //

Osservazione: se $\delta \in \text{n-linalt}(V)$, $\delta \neq 0$ allora:

$v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip sse $\delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$
$\boxed{v_1 \dots v_n \text{ sono lin DIP. sse } \delta(v_1, \dots, v_n) = 0}$

$\Rightarrow$ quasi ovvio $\delta(v_1, \dots, v_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_i^n \alpha_i \delta(v_1, \dots, v_n, v_i)$
$= 0 \dots + 0 = 0$

$\Leftarrow$? dimostriamo $v_1 \dots v_n$ base e $\delta \equiv 0$ //
δ è determinato da $\underbrace{\delta(v_1 \dots v_n)}_{\text{base}} \Rightarrow \delta = 0$

Def se $\varphi : V \to V$ funzione lineare
definiamo:
$\boxed{\det(\varphi) := \frac{\delta(\varphi e_1, \dots, \varphi e_n)}{\delta(e_1, \dots, e_n)}}$
dove $\delta \in \text{n-linalt}(V)$, $\neq 0$
$e_1, \dots, e_n$ è base di V

e la definizione NON DIPENDE né da δ, né dalla base!

$\boxed{\text{se } A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) := \det(\varphi_A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(i),i} \quad (\text{dove } \varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \; X \mapsto AX)}$

la definizione di det non dipende dalla $\delta \in \text{n-linalt}(V)$, $\neq 0$ perché se δ' un'altra
allora $\delta' = \alpha\delta$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\neq 0$

$\frac{\delta'(\varphi e_1 \dots \varphi e_n)}{\delta'(e_1 \dots e_n)} = \frac{\alpha \delta(\dots)}{\alpha \delta(\dots)} = \frac{\delta(\varphi e_1 \dots \varphi e_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)}$

idem se cambio base! (problema)

$\frac{\delta(\varphi v_1 \dots \varphi v_n)}{\delta(v_1 \dots v_n)}$ con $\frac{\delta(\varphi e_1 \dots \varphi e_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)}$ //

se $(v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n) H$ (matrice invertibile)
allora $(\varphi v_1 \dots \varphi v_n) = (\varphi e_1 \dots \varphi e_n) H$ (per linearità di φ)

$= \frac{\delta((\varphi e_1, \dots, \varphi e_n) H)}{\delta((e_1, \dots, e_n) H)} = \frac{\delta(\varphi e_1, \dots, \varphi e_n) \cancel{\sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(i),i}}}{\delta(e_1, \dots, e_n) \cancel{\sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(i),i}}}$

oppure: calcolare δ "in un'altra base" dà comunque una funzione n-lin alt, che quindi è come calcolare $k \cdot \delta$ sulla base $e_1, \dots, e_n$ con $k \in \mathbb{K}$, $\neq 0$ ...

$\det : \text{Endo}(V) \longrightarrow \mathbb{K}$
φ isomorfismo $\Leftrightarrow \det \varphi \neq 0$
($\varphi(\text{base})$ è base)
$\delta(\varphi(\text{base})) \neq 0$
$\det \varphi = \frac{\delta(\varphi \text{base})}{\delta(\text{base})} \neq 0$

$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
invertibile
è l'unica funzione n-lineare alternante sulle colonne della matrice
$\underline{\underline{E}}$ tale che $\det(\mathbb{1}_n) = 1$
$\frac{\delta(\varphi e_i)}{\delta(e_i)} = \frac{\delta(e_i)}{\delta(e_i)} = 1$

$\det(A) = \sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(i),i}$

det non è funzione lineare!

ma: $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

$\det(A_1 + A_1', A_2 \dots A_n) = \det(A_1, A_2 \dots A_n) + \det(A_1', A_2 \dots A_n)$

$\boxed{\text{però: } \det(\mathbb{1}_n) = 1, \quad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$

Teo di BINET:
det è moltiplicativa!
in particolare
$\det : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^\times$
è morfismo di GRUPPI MOLTIPLICATIVI
$\det(\mathbb{1}) = 1$
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = \det(A)^{-1}$

infatti
$\det(\Psi \circ \varphi) = \frac{\delta(\Psi \circ \varphi e_1 \dots \Psi \varphi e_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)}$
$= \frac{\delta(\Psi(\varphi e_1) \dots \Psi(\varphi e_n))}{\delta(e_1 \dots e_n)}$

se $\varphi e_1 \dots \varphi e_n$ non è base, allora $= 0$

oppure $\underbrace{\frac{\delta(\Psi \varphi e_1 \dots \Psi \varphi e_n)}{\delta(\varphi e_1 \dots \varphi e_n)}}_{\det(\Psi)} \cdot \underbrace{\frac{\delta(\varphi e_1 \dots \varphi e_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)}}_{\det(\varphi)}$ //

12/12/2023

Riassunto:

studiamo funzioni $\underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ addendi } V} \xrightarrow{\delta} \mathbb{K}$

che siano n-multilineari $\delta(\dots, v + v', \dots) = \alpha\delta(\dots, v, \dots) + \delta(\dots, v', \dots)$
alternanti: $\delta(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0 \Rightarrow \delta(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\delta(\dots, w, \dots, v, \dots)$
(car $\neq 2$) antisimmetrica

Se $e_1 \dots e_n$ base di base: $\{\text{n-lin alt}\} \longrightarrow \mathbb{K}$
$\delta \longmapsto \delta(e_1 \dots e_n)$
è isomorfismo spazi vettoriali!
$\delta(v_1, \dots, v_n) = \delta(\sum_i, \sum_i, \dots, \sum_i) =$
$(e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \dots (e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
$\sum_i a_{i1} e_i$ (a_{ij})
$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\right) \delta(e_1 \dots e_n)$
⊗

$\varphi : V \to V$ oppure $A \in M_n(\mathbb{K})$

$\det(\varphi) := \frac{\delta(\varphi e_1 \dots \varphi e_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)}$
dove $\delta \in \text{n-lin alt}(V)$, $\neq 0$
$e_1 \dots e_n$ base V
e det non dipende dalla scelta di δ, base.

$\boxed{\det(A) = \det(\varphi_A) = \frac{\delta(Ae_1 \dots Ae_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)} = \frac{\sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(i),i} \cancel{\delta(e_1 \dots e_n)}}{\cancel{\delta(e_1 \dots e_n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{\sigma(i),i}}$
$\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $X \mapsto AX$

$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$
$A \longmapsto \det(A) = |A|$
è l'unica funzione n-lineare alternante sulle colonne di A e che vale 1 sulla matrice identica
$\det(\mathbb{1}) = \frac{\delta(e_1 \dots e_n)}{\delta(e_1 \dots e_n)} = 1$

$\left(\begin{array}{l} \delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \text{ sse } v_1 \dots v_n \text{ lin indip} \\ \delta(v_1 \dots v_n) = 0 \text{ sse } v_1 \dots v_n \text{ lin DIPEND.} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ll} \det(\varphi) \neq 0 \text{ sse } \varphi e_1 \dots \varphi e_n \text{ base (lin ind)} & \det(A) \neq 0 \text{ sse } A \in GL_n(\mathbb{K}) \\ \text{sse } \varphi \text{ automorfismo} & \text{sse } rg(A) = n. \end{array}\right)$

Conseguenze:

① $\det(a) = a$ se $a \in \mathbb{K} = M_1(\mathbb{K})$

② $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = (\searrow) - (\swarrow)$
$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ +
$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ −

$\boxed{\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{scambi tali che } \sigma = \text{composizione scambi}} = \frac{\prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i<j} (j - i)}}$

③ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + ___ + ___$
$- a_{31}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - ___$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\sigma(1)$ $\sigma(2)$ $\sigma(3)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= (\searrow) - (\swarrow)$
"diagonali − antidiagonali" (SARRUS)

④ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \vdots & & \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} = \sum$ di 24 termini, metà +, metà −

⑤ $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \, a_{\sigma(1),1} \, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$

dà $n!$ addendi ciascuno dei quali
è $\text{sgn}(\sigma)$
con prodotto di termini a_{ij} nella matrice
UNO per ogni riga
UNO per ogni colonna,
in tutti i modi possibili!

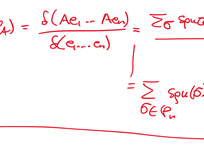
⑥ $\det(A^t) = \det(A)$ $\quad A^t = (a_{ji})$ se $A = (a_{ij})$

infatti $\det(A^t) = \det(b_{ij})$
$= \sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i b_{\sigma(i),i}$
$= \sum_\sigma \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma(i)}$
$\pi = \sigma^{-1}$ $\quad = \sum_\pi \text{sgn}(\pi) \prod_j a_{\pi(j),j} = \det(A)$

⊛ dunque det è anche multilineare e alternante SULLE RIGHE DELLA MATRICE!

⑦ matrici triangolari / diagonali:
supponiamo:
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_\sigma \dots = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$
solo $\sigma = id$ dà contributo $\neq 0$.

infatti: se $\sigma \neq id$ allora esiste $j : \sigma(j) > j$ (e anche $k : \sigma(k) < k$)



allora $\boxed{a_{\sigma(j),j} = 0}$
e il suo prodotto dà 0.

$\det\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & \end{pmatrix} = \pi$ di diagonali

$\det\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} = \pi$ di diagonali.

⑦' e per matrici "antidiagonali":
$\det\begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} = ?$
o "antitriangolari":
$\det\begin{pmatrix} 0 & \\ * & \end{pmatrix} = ?$

⑧ $\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B) = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$

A, B matrici quadrate

perché qui permutazione che usa termini nella zona * usa anche termini nella zona 0.

⇒ ⑧' e per matrici $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & * \end{pmatrix}$ con A, B quadrate?

⑨ Metodo efficiente di calcolo:

$A \xrightarrow{\text{Gauss}} A' = HA \Rightarrow \det(A') \to \det(H)\det(A)$
H prodotto $H_1 \dots H_N$ matrici elementari di Gauss

basta conoscere $\det(H)$ con H matrici elementari Gauss:

op Gauss: scambio $S_{ij} = \mathbb{1}_n - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji} =$ $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ (i, j)
$\det = -1$ $\quad (S_{ij}^2 = \mathbb{1}$, $\det(S_{ij})^2 = 1)$

gli scambi moltiplicano il det per −1

$\boxed{\begin{array}{l} \text{sommare a riga/colonna un'altra} \\ \mathbb{1}_n + \alpha e_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \\ \det = 1 \end{array}}$

In particolare, queste operazioni di Gauss non cambiano il det.

moltiplicare riga/colonna per $\alpha (\neq 0)$:
$\mathbb{1} + (\alpha - 1) e_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$ (i)
$\det = \alpha$

moltiplicare una riga/colonna per α moltiplica il det per α.

Problema EE:

la funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$
è univocamente determinata da:
(1) moltiplicativa: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(2) vale α sulla matrice $\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$

(non basta: dalla condizione si calcola det sulle matrici elementari ....)

18/12/2023