Calcolo dei determinanti x induzione sull'ordine della matrice (FORMULE di LAPLACE):

Risultato fondamentale: $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$ "sviluppo secondo la j-esima colonna"

dove A_{ij} = matrice che si ottiene da A eliminando riga e colonna di a_{ij}

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$ "sviluppo secondo la i-esima riga"

Gli sviluppi di Laplace sono quelli della scacchiera:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \\ + & - & + & - & + & \\ - & + & - & + & - & \\ + & - & + & - & + & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

"dimostrazione": perché la formula di Laplace spiegano della definizione di determinante?

① Vediamo che la formula stessa definisce una funzione in induzione ← facile

$\boxed{\text{calcolare } |A|}$ ← "dividere" MATRICE IN COMPONENTI

1 sm $\boxed{\det}$ ← $\det(A_{ij}) = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = 1$ (tutto è fatto a mano $\underset{(i,j)}{\underline{\text{ci}}}|A_{ij}|$)

e allora si det.

② $\det(A) = \sum_{\sigma \in S} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_i a_{\sigma(i)i}$

$$= \sum_{\sigma(1)=1} + \sum_{\sigma(1)=2} + \sum_{\sigma(1)=3} + \cdots + \sum_{\sigma(1)=n}$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{1j}}_{\sigma(1)=j} \prod_{i \neq 1} a_{\sigma(i)i}$$

$$a_{1j} \sum_{\{\sigma_2,\dots,\sigma_n\} \to \{1,2,3,\dots,n\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod \dots$$

$$= a_{1j} \sum_{\{\sigma_2,\dots,\sigma_n\} \to \{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i \neq 1} a_{\sigma(i)i} + (-1) a_{1j} \sum_{\{\sigma_2,\dots,\sigma_n\} \to \{1,\dots,n\}} + a_{1j} \det(A_{1j}) + \dots$$

$\det(A_{1j})$

"sviluppo di Laplace in 1ª colonna".

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ $A = (a_{ij})$ allora esiste $A^c = (a^c_{ij})$ (ASSEGNATE PER CAUSE ALGEBRICHE) tale che

$$A \cdot A^c = A^c A = \det(A) \mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a^c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})}$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^c}$$

$$\left(A \left(\frac{1}{\det(A)} A^c \right) = \mathbb{1}_n \right)$$

13/12/2022

Osservazioni della formula Laplace:

- calcolo di matrici inverse (sviluppi elementi di Laplace. Matrice dei cofattori algebrici)
- soluzioni di sistemi con sistemi quadrati (CRAMER)
- esempio: Vandermonde

Sono sempre minori di MATRICI quadrati

---

dato $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

definiamo $A^c := \left((-1)^{i+j} \det(A_{ji}) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ (segnati minori massimi di A)

dove A_{ij} = matrice che si ottiene da A eliminando i-esima riga, j-esima colonna.

allora: $A A^c = A^c A = \det(A) \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{A A^c}}{(a_{ij})} \underset{\shortparallel}{(c_{ij})} = \left((-1)^{i+j} \det(A_{ji}) \right)$$

$$(a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in}) \begin{pmatrix} (-1)^{1+j} \\ (-1)^{2+j} \\ \vdots \\ (-1)^{n+j} \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij} \det(A)$$

Spiegazione: ala fine

$$= (a_{i1} \; a_{i2} \; \cdots \; a_{in}) \begin{pmatrix} (-1)^{1+j} \det(A_{j1}) \\ (-1)^{2+j} \det(A_{j2}) \\ \vdots \\ (-1)^{n+j} \det(A_{jn}) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} (-1)^{\ell+j} \det(A_{j\ell}) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+j} a_{i\ell} \det(A_{j\ell}) = \begin{cases} i=j \text{ allora è} \\ \text{sviluppo di Laplace di } A \end{cases} = \det(A)$$

se invece $i \neq j$ (SVILUPPI ALTRI DI LAPLACE) $= 0$

è sviluppo di Laplace secondo la colonna $\underset{\text{sbagliata}}{j}$-esima di A, che però sono moltiplicati non per gli elementi della j-esima colonna, ma per quelli della i-esima!

= det (matrice A con cui il posto della j-esima colonna si è messa di nuovo la i-esima colonna) $= 0$

sviluppo j-esima colonna

Conseguenza:

se $\det(A) \neq 0$ abbiamo

$$A A^c = \underset{\neq 0}{\det(A)} \mathbb{1} \Rightarrow A \left(\frac{1}{\det(A)} A^c \right) = \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^c}$$

Problema: se $\det(A) = 0$?

$A A^c = 0_n$

cosa possiamo dire di A^c?

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow rg(A^c) = n \Leftrightarrow \underline{\det(A^c) \neq 0}$

$$A A^c = \det(A) \mathbb{1}$$

$$\det(A A^c) = \det(\det(A) \mathbb{1})$$

$$\det(A) \det(A^c) = \det(A)^n$$

$$\boxed{\det(A^c) = \det(A)^{n-1}}$$

$$rg(A^c) = \begin{cases} n & \text{se } rg(A) = n \\ 1 & \text{se } rg(A) = n-1 \\ 0 & \text{se } rg(A) < n-1 \\ & (A^c = 0) \end{cases}$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$

$A A^c = 0$ colonne di A^c sono sol $\det(A x) = 0$

perché i minori di ordine n-1 sono tutti nulli (sottomatrici la matrice avrebbe rango n-1 almeno...)

Regola di CRAMER:

Sia $AX = b$ $A \in M_n(\mathbb{K})$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

sistema quadrato con $\det(A) \neq 0$

allora esiste una unica soluzione ($rg(A) = n = rg(A|b) \Rightarrow$ per R.C. $\exists$! soluzione)

ed è

$$X = A^{-1} b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\det(A)} A^c$

Cioè:

$$x_i = (\text{riga } i\text{-esima di } A^{-1}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \left((-1)^{1+i} \frac{\det(A_{1i})}{\det(A)}, (-1)^{2+i} \frac{\det(A_{2i})}{\det(A)} \dots, (-1)^{n+i} \frac{\det(A_{ni})}{\det(A)} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{i+\ell} b_\ell \det(A_{\ell i})$$

sviluppo di Laplace della i-esima colonna di A in cui abbiamo sostituito i termini $a_{\ell i}$ con b_ℓ

$$= \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i = matrice A in cui la i-esima colonna è sostituita dalla colonna dei termini noti

---

problema EE: (char $\mathbb{K} \neq 2$)

$A \in M_n(\mathbb{K})$ è antisimmetrica se: $A^t = -A$ (simmetrica se $A^t = A$)

$\det(A)$ se A antisimmetrica?

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è DISPARI} \quad (\text{facile}) \\ \text{se } n \text{ è PARI} & \text{è un quadrato del campo } \mathbb{K} \\ & = z^2 \text{ con } z \in \mathbb{K} \quad (\text{difficile}) \quad n=2, n=4 \end{cases}$$

(pfaffiani!)

Definizione dei MINORI di una MATRICE

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Minori di A sono determinanti delle SOTTOMATRICI QUADRATE di A

(SOTTOMATRICE = matrice ottenuta cancellando alcune righe e alcune colonne)

ossia: un minore = ordine della sottomatrice

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (1) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

$\cancel{\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}}$

Risultato fondamentale:

$rg(A)$ = massimo ordine dei minori $\neq 0$ di A

= massimo ordine di sottomatrici quadrate INVERTIBILI di A.

più precisamente:

$rg(A) = r$ SSE: ① esiste un minore non nullo di A di ordine r

② tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli

quindi sono i minori di matrice $r+1$? $\binom{m}{r+1}\binom{n}{r+1}$

principio dei minori orlati:

$rg(A) = r$ SSE ① esiste un minore non nullo di A di ordine r

② tutti i minori orlati di ① sono nulli

"minori di sottomatrice che contengono quello trovato in ①"

quindi sono i minori orlati di vista fissato? $(m-r)(n-r)$

bisogna insistere che: se vogliamo la due condizioni, allora TUTTI i minori di ordine $r+1$ sono nulli oppure che si è sostituito il minore di colonne/righe indipendenti della matrice (questo è già fatto).

Insistiamo che $rg(A)$ = max ordine di minori $\neq 0$ di A

$rg(A) = r \Rightarrow$ esistono minori non nulli di ordine r (quanto dice $\leq$)

$A = \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}$

r colonne indipendenti (ottenute da r righe)

$\Rightarrow$ r righe indipendenti

minore diverso $\neq 0$.

se $r = \underline{\max}$ ordine di sottomatrici quadrate invertibili $\Rightarrow rg(A) = r$

$\exists$ sottomatrice $\square$ di ordine r invertibile

quindi $\exists$ r colonne di A indipendenti

dunque $rg(A) \geq r$, quindi $=$.

base ricorsiva Laplace: i minori di ordine $> r+1$ si sviluppano come combinazioni di minori di ordine $r+1$, quindi sono tutti nulli!

Applicazione: determinare equazioni cartesiane

Sia

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{K}^5$$

dim $U = 2$

equazioni $= 5 - 2 = 3$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in U \text{ SSE } rg \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 3 \\ x_4 & 1 & 4 \\ x_5 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{colonne indip.}} = 2$$

SSE tutti i minori 3x3 sono nulli

max diversi $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ equazioni (TROPPE!)

SSE tutti i minori orlati di $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ sono nulli

e sono 3 equazioni

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 2 \\ x_4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_3 & 1 & 3 \\ x_4 & 1 & 4 \\ x_5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}_{\neq 0} - x_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ x_1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0 \\ x_3 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \otimes & \circ & \circ & \times & \times \\ \circ & \otimes & \circ & \times & \times \\ \circ & \circ & \otimes & \times & \times \end{pmatrix}$$

$\neq 0$

fatto!

19/12/2023

Esempio classico: Vandermonde.

uso di sp di Laplace & sviluppo Laplace (induzione):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

dunque è nullo se $x_i = x_j$ per $i \neq j$ (2 colonne uguali!)

è matrice d'ordine n+1

le cui colonne sono potenze i-esime ($i = 0, 1, \dots, n$) di $x_0, x_1, \dots, x_n$.

dim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^2 - x_0^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_0^n & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix}$$

sp Laplace: $\begin{cases} \text{1ª} - x_0 \cdot \text{1ª} \\ \text{2ª} - x_0 \cdot \text{2ª} \\ \text{ecc.} \\ \text{(n+1)ª} - x_0 \cdot \text{1ª} \end{cases}$

sviluppo Laplace 1ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ 0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_n(x_n - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

raccolgo $(x_1 - x_0)$ sulla colonna

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

fatti d'ordine n con variabili $x_1, \dots, x_n$

per induzione

$$= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \prod_{\substack{i>j \\ j=1,\dots,n}} (x_i - x_j) =$$

$$= \prod_{\substack{i>j \\ i=0,\dots,n}} (x_i - x_j)$$