G1-234-4e

giovedì 14 dicembre 2023 12:37

Esercizi sui determinanti:

① $A = -A^t$ (antisimmetrica), $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\Rightarrow$ $\det(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ DISPARI (facile)} \\ \text{un quadrato} & \text{se } n \text{ PARI (difficile!)} \end{cases}$

② A diagonale $\Rightarrow$ $\det(A)$ = prodotto di diagonale

A antidiagonale $\Rightarrow$ $\det(A) = ?$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

② A triangolare $\Rightarrow$ $\det(A) = ?$

A antitriangolare $\Rightarrow$ $\det(A) = ?$

③ $$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & a_2 & & b_2 & \\ & & \ddots & & \\ & b_{n-1} & & a_{n-1} & \\ b_n & & & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ?$$

(ordine PARI)

④ $$A = \begin{pmatrix} 0 & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ?$$

⑤ $$A = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{"tutti 1"}} \Rightarrow \det(A) = ?$$

⑥ $$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

A, C quadrate

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = ?$$

B, C quadrate

⑦ (Ricordare il det di Vandermonde)

Alternanti doppi di Cauchy:

calcolare $\det\left(\frac{1}{y_i - x_j}\right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$

⑧ Mostrare che la funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è determinata completamente dalle seguenti proprietà:

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(2) $\det(\mathbb{1} + (\alpha - 1)e_{ii}) = \alpha$ (basta per $i=1$ in realtà)

Sugg.: usare le matrici elementari di Gauss...

⑨ Usando det trovare le equazioni cartesiane di

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\text{in } \mathbb{K}^5).$$