Problema del diagonalizzare per **congruenza**:
Partendo da una forma bilineare simmetrica $A = \varphi_A(V)$ $\longrightarrow$ trovare una base ortogonale V (che ha φ_A diagonale)

$SAP = \varphi_A(V)$ $\longrightarrow$ cambio della base da una matrice variabile al cambio base $\varphi_{P^{-1}AP}(e_i)$

$A = \varphi_A(V)$
$P^{-1}AP = \varphi_P(V)$ $\longrightarrow$ $P: V \to V$, P base $\to$ base

Def: $A, B \in M_n(K)$:
A equivalente a B $\Leftrightarrow$ $A \simeq B$ $\Leftrightarrow$
$\exists$ matrici invertibili P, Q tali che $B = QAP$
(se A, B rappresentano la STESSA funzione rispetto ai basi diverse).
$A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$
è relazione equivalenza: $\mathrm{GL}(n)$ gruppo
$A \simeq A$ $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$

Def: $A, B \in M_n(K)$
A simile $(\sim)$ a B $\Leftrightarrow$ $A \sim_{\mathrm{sim}} B$ $\Leftrightarrow$
$\exists P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tale che $B = P^{-1}AP$
(se A, B rappresentano lo STESSO ENDOMORFISMO di K^n in SE $\sim$ sui basi diverse).

Problema: classificare $M_n(K)/\sim$
per poter capire quanti e quali "tipi" esistono?

Osservazioni:
se $A \sim B$ allora $A \simeq B$, ma viceversa NO!
$(\exists B = P^{-1}AP = QAP$ $\nexists$ P)

Esempi: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$B \simeq \mathrm{GL}$ $(B = QAP + 0)$ $[\mathrm{GL}]_n = \{0\}$
$B \sim \mathrm{GL}$ $(B = PBP + 0)$ $[\mathrm{GL}]_n = \{0\}$

$A \sim B$: $B \sim QAP + 0 = QP$ $[\mathrm{GL}]_n = \mathrm{GL}(n)$
$B \sim \mathrm{GL}$: $B = PBP = P^{-1}P = I$ $[\mathrm{GL}]_n = \{I\}$

$A \simeq B$, $A \not\sim B$: $[\mathrm{GL}]_n = \{\mathrm{GL}(n)\}$
$[\mathrm{GL}]_n = \{I\}$

Teorema di classificazione per ERMITIANE REALI:
Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ ermitiana:
allora $A \simeq \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove $n = \mathrm{rg}(A)$
p dipende dalla forma.

Quindi: $M_n(\mathbb{R})/\simeq$ $\longrightarrow$ $\{0, 1, \dots, n\}$ $(n+1)$
$A \longrightarrow \mathrm{rg}(A)$

Inoltre dato un tipo $p \in \mathbb{N}$ esiste $A \in \mathbb{R}^n$ $\mathrm{rg}(A) = p$

Cioè: $M_n(\mathbb{R})/\simeq$ $\longrightarrow$ $\{0, 1, \dots, n\}$ $(n+1)$
$A \longrightarrow \mathrm{rg}(A)$

Inoltre dato un tipo $p \in \mathbb{N}$ esiste $A \in \mathbb{R}^n$ $\mathrm{rg}(A) = p$

Cioè dato una forma bilineare simmetrica φ_A esiste una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ $\varphi_A(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \le p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Cioè: $\varphi_A(v_i) = e_i$
$\varphi_A(v_1, v_2) = e_1 + e_2$
$\varphi_A(v_1) = e_1$
$\varphi_A(v_2) = e_2$
$\varphi_A(v_3) = 0$

Il grado massimo che rappresenta la matrice è $\mathrm{rg}(A)$

$A \simeq B$ se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

Dimostrazione:
① usando simili, usando Jordan:
$A \xrightarrow[\text{simile reale}]{} \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{simile complessa}]{} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

② usando $\varphi: V \to V^*$
usiamo $v_1 = \delta_1, \dots, v_n = \delta_n$ base di V
$\varphi(v_1) = \delta_1, \dots, \varphi(v_n) = \delta_n$ base di V^*
φ è isomorfismo
e come base di V usiamo: $\varphi_1, \dots, \varphi(v_p), \dots, \varphi(v_n)$ completo a base di V^*
Sono lin indip.
Quindi base di V^* $\Rightarrow$ φ è iso (surjection)
e allora $\varphi_{\varphi(v)}(v) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0_{n-p} \end{pmatrix}$

Problemi:
Ⓔ $A \simeq B$ se $B = QA$ con $Q \in \mathrm{GL}$ (cambiamo di base solo dominio)
$A \not\simeq B$ se $B = AP$ con $P \in \mathrm{GL}$ (cambiamo di base solo dominio)
Ma, se sono entrambi sono di equivalenza
Esercizio: $M_n(\mathbb{R})/\simeq$, $M_n(\mathbb{R})/\sim$

EE: Problema del equivalenza SIMULTANEA per 2 matrici:
dati $A, B \in M_n(K)$,
quando posso trovare $P, Q \in \mathrm{GL}$ tali che
$QAP = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$QBP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$?

Problema di TRIANGOLARIZZAZIONE:
$A, B \in M_n(K)$: $A \simeq B$ $\underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists P \in \mathrm{GL}_n(K)$: $B = PAP$

Osservazioni: $A \simeq B$ $\underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $A \sim_{\mathrm{sim}} B$ $\Leftrightarrow$ $A \sim_{\mathrm{sim}} B$
- se $A \sim_{\mathrm{sim}} B$ allora $\det(A) = \det(B)$
- abbiamo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\det = 1$, $\det = -1$, $\det = 1$
sono diagonali quindi sono $\sim$ a se stesse e anche tra loro.
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (\ ?\ )$

Problema: $M_n(K)/\simeq$ $\quad$ $\mathrm{GL}(n)$
per poter dare una mappa semplice
(non posso usare punti di equivalenza!)

Def-Proposizione:
① $A \in M_n(K)$ è TRIANGOLARIZZABILE $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ esiste $P \in \mathrm{GL}(n)$: $B = PAP$ è triangolare
(cioè $A \simeq_{\mathrm{sim}} (\Delta^n)$)
② $A \in M_n(K)$ è DIAGONALIZZABILE $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ esiste $P \in \mathrm{GL}(n)$: $B = PAP$ è diagonale
(cioè $A \simeq_{\mathrm{sim}} (\Delta^n)$)

Quindi cercare matrici a scalini di $\Psi = A$?
CRITERIO BASATO SU DIAGONALIZZABILITÀ:
A diagonalizzabile SE E SOLO SE triangolarizzabile!

Matrici PRODOTTO $\sim$ POLINOMI!

Se esistono $v \neq 0$ tale che $\varphi(v) = \alpha v$ $\left(\begin{matrix} \alpha, v \text{ incognite} \\ \text{sistema di equazioni} \end{matrix}\right)$

Se $\exists v \neq 0$: $\varphi(v) - \alpha I = 0$
$(\varphi - \alpha I)(v) = 0$
Se $\ker(\varphi - \alpha I)(v) = 0$
Se $\ker(\varphi - \alpha I)_v = 0$
Se $\det(\varphi - \alpha I)_v = 0$
Se $\alpha \in K$ tale che $\det(\varphi - \alpha I) = 0$
$\det(A - \alpha I)$

autovalori di A $(\alpha \in K)$ = tali che polinomio CARATTERISTICO di A $(\alpha \in K)$
$P_A(\alpha) = \det(\alpha I - A)$
che è polinomio MONICO di grado n nella varia α
$\alpha \in K$ tale che $P_A(\alpha) = 0$
Quindi gli autovalori sono radici di P_A

Sempre: ① Esiste autovalore di A
② Per ogni autovalore α esistono $v \neq 0$ tali che $(A - \alpha I)v = 0$
Si trovano gli autovettori!

Sempre vero (grazie al fatto che K è chiuso)

Dopo che abbiamo, Si trova un determinante un polinomio di grado n, trovare gli zeri di polinomi è problema difficile!

Osservazioni:
① gli autovalori sono le radici in K del polinomio caratteristico di A
CARATTERISTICO di A $(\alpha \in K)$
è indipendente dalla base di A
$P_A(\alpha) = \det(\alpha I - A) = \det\begin{pmatrix} \alpha - a_{11} & -a_{12} & \dots \\ -a_{21} & \alpha - a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
$P_{(1,1)}(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ -1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)^2 - 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 1 = \alpha^2 - 2\alpha = \alpha(\alpha - 2)$
autovalori $\alpha = 0$, $\alpha = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
autovettori: Matrice di $A - \alpha I = 0 \Rightarrow x + y = 0$
$\alpha = 0$: $x + y = 0$
$\alpha = 2$: $-x + y = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Basta per dimostrare che $\{(1,1)\}$ è base di V_0
② $A \simeq B \Rightarrow P_A(\alpha) = P_B(\alpha)$
$\det(\alpha I - B)$
$\det(\alpha I - PAP)$
$\det(\alpha PIP - PAP)$
$\det(P^{-1}(\alpha I - A)P)$
$\det(P^{-1})\det(\alpha I - A)\det(P) = P_A(\alpha)$
Quindi $\det(\alpha I - A) = P_A(\alpha)$
Quindi $\det(\alpha I - B) = P_B(\alpha)$
Quindi $P_A(\alpha) = P_B(\alpha)$
Quindi $\det(P^{-1}(\alpha I - A)P) = P_A(\alpha)$
Quindi $\det(P^{-1})\det(\alpha I - A)\det(P) = P_A(\alpha)$
Quindi $\det(\alpha I - A) = P_A(\alpha)$
Quindi $\det(\alpha I - B) = P_B(\alpha)$
Quindi $P_A(\alpha) = P_B(\alpha)$
Quindi $\det(\alpha I - B) = P_A(\alpha)$
Quindi $\det(\alpha I - A