Teoria di Jordan: se φ è triangolarizzabile (tutti autov in $\mathbb{K}$) cerca la matrice triangolare più semplice possibile per φ.

$m_\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_s)^{m_s}$ $\quad m_i \geq m_i$

se $\varphi: V \to V$ con $p_\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_s)^{m_s}$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}$

① allora possiamo applicare la sua decomposizione e $p_\varphi(x)$ e quindi:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

$V_1 = \ker(\varphi-\alpha_1)^{m_1} = \ker(\varphi-\alpha_2)^{m_1}$, $\quad V_s = \ker(\varphi-\alpha_s)^{m_s} = \ker(\varphi-\alpha_1)^{m_s}$

dove $\varphi_i : V_i \to V_i$ ha pol. caratt. $(x-\alpha_i)^{m_i}$ e minimo $(x-\alpha_i)^{m_i}$ (φ_{V_i})

e in basi di questi sottospazi la matrice di φ è del tipo

$$\begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1 \; * \; \cdots \; * \; \alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\alpha_s \; * \; \cdots \; * \; \alpha_s} \end{pmatrix}$$

Morale: basta studiare sottospazi in cui la funzione ha UN SOLO AUTOVALORE.

② studiamo $\varphi: V \to V$ con unico autovalore α: $p_\varphi(x) = (x-\alpha)^{\dim V}$, $m_\varphi(x) = (x-\alpha)^n$, $n \leq m$

e studiando $\psi = \varphi - \alpha\, id : V \to V$ abbiamo $p_\psi(x) = x^m$ cioè $\psi^m = 0$ cioè ψ nilpotente

(per H.C.: $(\varphi - \alpha id)^m = 0$, $\psi^m = 0$)

quindi basta studiare funzioni NILPOTENTI (unico autovalore 0) e poi

$\varphi = \alpha\, id + \psi$

Matrice di φ $= \alpha \mathbb{1} +$ matrice di ψ $= \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * & \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix}$?

③ $\varphi: V \to V$ nilpotente $\varphi^m = 0$ ($\varphi^n = 0$ per $n \leq m$)

allora

$$0 \subsetneq \ker(\varphi) \subsetneq \ker(\varphi^2) \subsetneq \ker(\varphi^3) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(\varphi^n) = V$$

ci dà una FILTRAZIONE dello spazio V con SOTTOSPAZI che si dicono "AUTOSPAZI generalizzati di φ".

"matrici nilpotenti semplici" $= N$

$\alpha \mathbb{1} + N$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1 \mathbb{1} + N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\alpha_s \mathbb{1} + N_s} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1 \cdots \alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\alpha_s \cdots \alpha_s} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_s \end{pmatrix}}_{N}$$

$$\boxed{A \sim D + N \quad \text{con} \quad DN = ND}$$

Teorema di struttura di endomorfismi nilpotenti:

def Si dicono "matrici nilpotenti standard" le matrici del tipo

$$N_1 = (0),\ N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ N_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \ (s)$$

p	x	x^2	x^3
m	x	x^2	x^3

$N_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_3^3 = \mathbb{0}_3$

$v_1 \mapsto 0$, $v_2 \mapsto v_1 = \varphi(v_2)$, $v_3 \mapsto v_2 = \varphi(v_3)$

$N_5^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $N_5^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $N_5^{s-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $N_5^s = \mathbb{0}_5$

Teorema di struttura delle funzioni nilpotenti:

Se $\varphi: V \to V$ è nilpotente, allora $\exists$ base di V in cui la matrice di φ è fatta a blocchi nilpotenti standard:

$$\alpha_\varphi(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \boxed{N_i}_{N_i \times N_i} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

e le dimensioni dei $\ker(\varphi^i)$ determinano numero e ordine dei blocchi nilp. standard.

Costruzione della base:

$$0 \subsetneq \ker\varphi \subsetneq \ker\varphi^2 \subsetneq \ker\varphi^3 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker\varphi^n = V$$

↑ finché $=$ (pol. minimo)

① $i \leq$ sono $\subsetneq$ fino al primo $=$, poi tutte uguaglianze, cioè

se $\ker\varphi^i = \ker\varphi^{i+1}$

allora $\ker\varphi^i = \ker\varphi^j \quad \forall j \geq i$

(problema)

nilpotenti: se $\ker\varphi^i \overset{(*)}{=} \ker\varphi^{i+1}$ $\quad (\varphi^{i+1}v = 0 \Rightarrow \varphi^i v = 0)$

allora $\ker\varphi^{i+1} \overset{(*)}{=} \ker\varphi^{i+2}$ (perché $\varphi^{i+2}(v) = 0$, $\varphi^{i+1}(\varphi v) = 0 \Rightarrow \varphi^{i+1}v = 0 \Rightarrow \varphi^i v = 0$)

e così via (induzione)

② $0 \subsetneq \ker\varphi \subsetneq \ker\varphi^2 \subsetneq \ker\varphi^3 \subsetneq \ker\varphi^4 = V$ $\quad (n=4)$

allora $V = \underbrace{\ker\varphi^3}_{} \oplus V_4$ (complementare base dei $\ker\varphi^3$ (ovvero $\ker\varphi^4 = V \not\subseteq \ker\varphi^3$ ...))

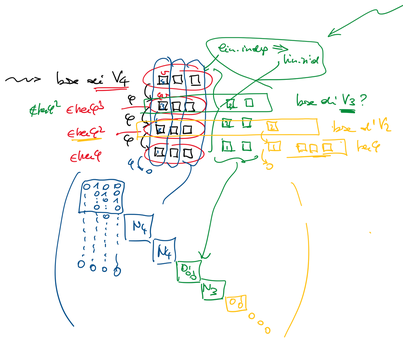
$= (\ker\varphi^2 \oplus V_3) \oplus V_4$

$= (\ker\varphi \oplus V_2) \oplus V_3 \oplus V_4$

($V_1 = \ker\varphi$)

(V_4 = compl. di $\ker\varphi^3$ in V; V_3 = compl. di $\ker\varphi^2$ in $\ker\varphi^3$; V_2 = compl. di $\ker\varphi$ in $\ker\varphi^2$)

$\rightsquigarrow$ base dei V_4



Problema: dalla dim dei $\ker\varphi^i$ come troviamo "numero" e "ordine" dei blocchi nilp. st.?

numero blocchi N_4 = dim V_4 = dim $\ker\varphi^4 -$ dim $\ker\varphi^3$

numero blocchi N_3 = (dim $\ker\varphi^3 -$ dim $\ker\varphi^2$) $-$ # blocchi N_4

numero blocchi N_2 = ...

" " N_1 = ...

$\ker\varphi^2 / \ker\varphi^1 / \ker$ diagramma di Young

se $u, v, w \in \ker\varphi^4 \setminus \ker\varphi^3$ lin indip

allora u, φu, $\varphi^2 u$; v, φv, $\varphi^2 v$; w, φw, $\varphi^2 w$ sono lin indip:

nilpotenti: se una combinazione lineare fa zero, applicando φ^3 troviamo $\varphi^3(au + bv + cw) = 0$ cioè $au + bv + cw \in \ker\varphi^3$, dunque $a = b = c = 0$, avendo perché u, v, w sono complementari di $\ker\varphi^3$,

e così via (per induzione)

15/01/2024

Riassunto:

① $\varphi: V \to V$ con $p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{s} (x-\alpha_i)^{m_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathbb{K}$

allora $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$, $V_i = \ker(\varphi - \alpha_i)^{m_i}$

$\varphi(V_i) \subseteq V_i$

$\varphi_i := \varphi_{|V_i} : V_i \to V_i$ ha un solo autovalore

$p_{\varphi_i}(x) = (x - \alpha_i)^{m_i}$

Matrice $\begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1 \cdots \alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\alpha_s \cdots \alpha_s} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha_i & ? \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix}$

② $\varphi_i : V_i \to V_i$ $\quad p_{\varphi_i}(x) = (x - \alpha_i)^{m_i}$

funzioni con unico autovalore

$\psi_i = \varphi_i - \alpha_i id : V_i \to V_i$ $\quad p_{\psi_i}(x) = x^{m_i}$

$\psi_i^{m_i} = (\varphi_i - \alpha_i)^{m_i} = 0$ H.C.

basta studiare funzioni nilpotenti ψ_i poi

$\varphi_i = \alpha_i id + \psi_i$

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \ddots \; \alpha_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

③ Struttura delle funzioni nilpotenti:

$\psi_i^{m_i} = 0$ $\quad (\psi_i^{m_i} = 0$ per minimo $n_i \leq m_i)$

$0 \subsetneq \ker\psi_i \subsetneq \ker\psi_i^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker\psi_i^{n_i} = V_i = \cdots$

$0 \subsetneq \ker\psi_i \subsetneq \ker\psi_i^2 \subsetneq \ker\psi_i^3 \subsetneq \ker\psi_i^4 = V_i$

base di V_4: $\ker\psi_i^4 = \ker\psi_i^3 \oplus V_4$

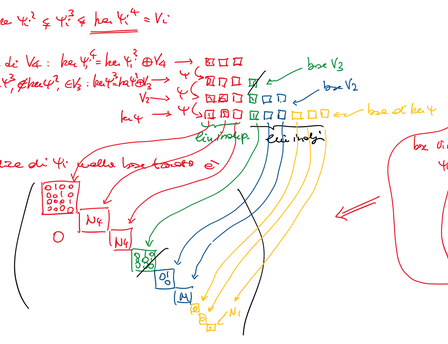
$\in \ker\psi_i^3$, $\notin \ker\psi_i^2$, $\in V_3$: $\ker\psi_i^2 / \ker\psi_i^1 \oplus V_3$

$V_2 \to$ base V_2

$\ker\psi \to$ base di $\ker\psi$

lin. indip. lin. indip.

matrice di ψ_i: nella base trovata è



come vengono i blocchetti nilpotenti:

$\psi v_4 = v_3$, $\psi v_3 = v_2$, $\psi v_2 = v_1$, $\psi v_1 = 0$

base v_1, v_2, v_3, v_4:

$\psi v_1 = 0$, $\psi v_2 = v_1$, $\psi v_3 = v_2$, $\psi v_4 = v_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema di Jordan: ogni matrice triangolarizzabile ammette una simile triangolare nella forma di Jordan:

$$A \underset{\mathbb{K}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{J_{d_1}} & & \\ & \boxed{} & \\ & & \boxed{J_{d_s}} \end{pmatrix}$$

dove $J(\alpha_i) = \mathbb{1}_{m_i} \alpha_i + N$

e $N = \begin{pmatrix} N_{i_1} & & \\ & N_{i_2} & \\ & & \ddots \; N_{i_{r_i}} \end{pmatrix}$ blocchi nilpot. standard.

$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_i & 1 \\ & \alpha_i \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \alpha_i & 1 \\ & \alpha_i \end{matrix}} & \\ & & \ddots \; \boxed{\alpha_i} \end{pmatrix}$

$\boxed{J_3(\alpha_i) = \alpha_i \mathbb{1}_3 + N_2}$

Nomi: $N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ nilpot. standard ordine i

$J_i(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} = \mathbb{1}_i \cdot \alpha + N_i$ jordan standard, autovalore α ordine i –

Domanda: quali sono gli invarianti di classificazione?

Per matrici triangolarizzabili, quante forme di Jordan possibili ci sono?

Inv. di class = per OGNI AUTOVALORE α il tipo di nilpotenza di $\varphi - \alpha$.

2×2: $\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq \beta$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ & \alpha \end{pmatrix}$

3×3: $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}}_{\substack{\text{caratt } (x-\alpha)^2(x-\beta) \\ \text{min } (x-\alpha)(x-\beta) \quad (x-\alpha)^2(x-\beta)}}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}}_{\text{caratt } (x-\alpha)^3}$

4×4: $\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \\ & & & \delta \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & 1 \\ & & & \beta \end{pmatrix}}_{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & & \\ & & \beta & 1 \\ & & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & \\ & & & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$

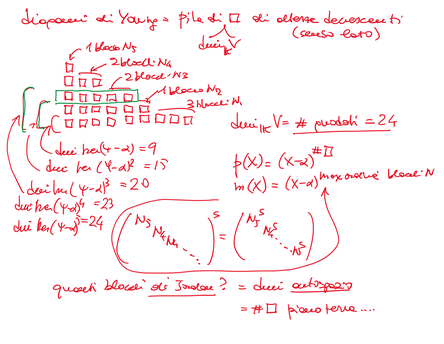
$(x-\alpha)^4$ p. caratt $\quad (x-\alpha)^3(x-\beta)$ $\quad (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

Problema: fare l'elenco delle forme canoniche nilpotenti e di Jordan per ordine 5.

Riassunto: come leggere tutto dai diagrammi di Young?

Problema: come le potenze cambiano la forma Jordan?

diagrammi di Young = pila di $\square$ di altezze decrescenti (senso largo) $\quad$ dim V



quanti blocchi di Jordan? = dim autospazio = # $\square$ primo tema ....

$A \sim J$, $A^i \sim J^i$ $\quad H^{-1}AH = J$

$J^i = (H^{-1}AH)^i = H^{-1}AH\,H^{-1}AH\,H^{-1}AH \cdots H^{-1}AH = H^{-1}A^iH$

$\boxed{\text{se } J \text{ nilpotente}}$ ex: $J = N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ← ker dim 1

allora $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ← dim ker = 2

$\sim \begin{pmatrix} N_2 & \\ & N_2 \end{pmatrix}$

$N_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$, $N_7^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_4 & \\ & N_3 \end{pmatrix}$

$\ker N = \langle e_1, e_2 \rangle$

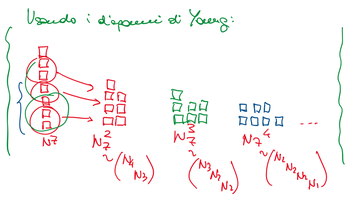
$\ker N^2 = \langle e_1, e_2, e_3, e_5 \rangle$

$m(x) = x^4$ $\quad \ker N^3 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$

$\ker N^4 = \ker N_7^3 = \ker 0 =$ tutto

$N_7^3 \sim \begin{pmatrix} N_3 & & \\ & N_2 & \\ & & N_2 \end{pmatrix}$?

Usando i diagrammi di Young:



se $J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \neq 0$

$J^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ & \alpha^2 & 2\alpha \\ & & \alpha^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & \\ & \alpha^2 & 1 \\ & & \alpha^2 \end{pmatrix}$

$\ker(J^2 - \alpha^2)$ dim rk = 1 solo blocco

Applicazioni: come calcolare potenze di matrici:

se A ha forma di Jordan $J = D + N$ $\quad (DN = ND)$

allora $H^{-1}AH = J$

$A = HJH^{-1}$

e

$A^n = (HJH^{-1})^n$

$= HJ\cancel{H^{-1}H}J\cancel{H^{-1}} \cdots \cancel{H}JH^{-1}$

$= HJ^nH^{-1}$

se J diagonale facile $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \; a_s \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & \ddots \; a_s^n \end{pmatrix}$

se $J = D + N$ allora siccome $DN = ND$ posso usare formula binomio

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i N^{n-i}$$

Esempio: i numeri di Fibonacci:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ $\quad n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots$

$n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$ $\quad$ ↑ n_{100}?

dare una formula diretta:

$$\begin{pmatrix} n_{i+1} \\ n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} n_i \\ n_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} n_{i-1} \\ n_{i-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} n_1 \\ n_0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \alpha_+ & 0 \\ 0 & \alpha_- \end{pmatrix} H^{-1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i = H \begin{pmatrix} \alpha_+^i & \\ & \alpha_-^i \end{pmatrix} H^{-1}$

Problema: $n_{i+1} = n_i + n_{i-1} - n_{i-2}$

$$\begin{pmatrix} n_{i+1} \\ n_i \\ n_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_i \\ n_{i-1} \\ n_{i-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} n_1 \\ n_0 \\ n_{-1} \end{pmatrix}$$

$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$?
n_0, n_1, n_2

Applicazioni: $\det(A) = \det(A^t)$

in realtà $\forall A$: $A \underset{\mathbb{K}}{\sim} A^t$

basta vedere che $J \underset{\mathbb{K}}{\sim} J^t$ $\forall$ forma Jordan

basta vederlo per un blocco standard:

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

base $v_1, \ldots, v_n$ $\quad$ usiamo la base $v_n, \ldots, v_1$

$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} = H$, $H^{-1} = H$

$\boxed{H^{-1}AH = HAH = A^t}$

$v_1 \mapsto \alpha v_1$, $v_2 \mapsto \alpha v_2 + v_1$, $v_3 \mapsto \alpha v_3 + v_2$, $\ldots$, $v_n \mapsto \alpha v_n + v_{n-1}$

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ 0 & \alpha & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$

$v_n \mapsto \alpha v_n$, $v_{n-1} \mapsto \alpha v_{n-1} + v_n$, $\ldots$, $v_2 \mapsto \alpha v_2 + v_3$, $v_1 \mapsto \alpha v_1$

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & & \\ 1 & \alpha & & \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

basta controllare $AH = HA^t$

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$

inverto le colonne $\quad$ inverto le righe

$\begin{pmatrix} & & \alpha \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 \\ 1 & & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \alpha \\ \alpha & & \end{pmatrix}$