Sous-espaces affines, intersection et dimension, Grassmanniennes :

Définition/Lemme : Soit E, E' sous-espaces affines de $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^n, V, +)$ pour $\mathbb{K}$ corps.

Définissons $E \cap E'$ (ensemble vide ou non vide) tenant à ce que possède sous-espace affine contenant E et E' ou bien $\mathbb{A}^n$, c'est-à-dire ou bien $\emptyset$.

Lemme $E \cap E' = \emptyset$ ou $E \cap E'$ sous-espace affine.

Preuve $E \cap E' = \emptyset$ (vide) ou $E \cap E' \neq \emptyset$ (non vide).

Si non vide, $\exists x \in E \cap E'$.

$E \cap E' = \{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \{x + v \mid v \in V \cap V'\} & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{array}$

$E \cap E' = \{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \{x + v \mid v \in V \cap V'\} & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{array}$

Remarque : $\angle$ $\nsim$ $\angle$ non sous-espace affine ou $\emptyset$ ou $\mathbb{A}^2$ ou $\mathbb{A}^1$ ou droite.

Définissons $\dim$ d'intersection avec hypothèse initiale et $\dim$ du théorème de dimensions vectorielles :

$\mathbb{K}$ corps
$V = \mathbb{K}^n$
$\dim V = n$
$\dim E = k$

$\dim E = \dim_{\mathbb{K}} W$
$\dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W'$

$\dim E \cap E' = \begin{cases} -1 & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

$\dim E \cap E' = \begin{cases} \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

$\dim E \cap E' + \dim E + \dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') - 1 + \dim E + \dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') + \dim E + \dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') + \dim E + \dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' + 1 & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') + \dim E + \dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(W \cap W') + \dim E + \dim E' = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} W' + \begin{cases} 1 & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ 0 & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dim E \cap E' + \dim E + \dim E' = \dim E + \dim E' + \begin{cases} 1 & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ 0 & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dim E \cap E' = \begin{cases} -1 & \text{si } E \cap E' = \emptyset \\ \dim E + \dim E' - \dim E & \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \end{cases}$

Théorème : $\forall E, E'$ $\mathbb{K}$-sous-espaces affines de $\mathbb{A}^n$ (sous-espaces affines) tels que $\dim E + \dim E' \geq \dim \mathbb{A}^n$, on a $E \cap E' \neq \emptyset$.

Preuve : $\dim E \cap E' = \dim E + \dim E' - \dim \mathbb{A}^n \geq 0$.

Problème : procédés des W_i tqués et les variétés algébriques particulières tire ? Idées essentiel dans ?

Généralisation : E_1, E_2 sous-espaces possibles, E_1 dans E_2, dans E_2 sous-espaces possibles, affine $E_1 \cap E_2$ dans affine $\emptyset$.

Exemple $\mathbb{K}, V$ quelconque de dim n possible, affine $\mathbb{A} = V$ et E possible $P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{dans } V}$

$\dim E \cap E' = n-1$.

Exemple : $\mathbb{K}$ corps quelconque, $\mathbb{K}$ possible non possible ou $\mathbb{K}$ affine $\mathbb{A}^n$ $\mathbb{K}$ $\mathbb{A}^n$ $\mathbb{K}$ (hyperplan affine) E_1 (hyperplan affine) E_2

(n points)

27/01/2023

Problème : $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$ espace affine $\mathbb{K}$ $\dim \mathbb{A} = \dim_{\mathbb{K}} V$

E sous-espace affine $= (E, W, +)$ $\dim E = \dim_{\mathbb{K}} W$

$\begin{cases} + : E \times W \to E \\ (x, w) \mapsto x + w \end{cases}$

(Sous-espace affine $E \subseteq \mathbb{A}$)

$\begin{cases} + : E \times W \to E \\ (x, w) \mapsto x + w \end{cases}$

E_1, E' espace affine : $E \cap E'$ est (sous-espace affine) ou $\emptyset$ (vide)

$\begin{cases} \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \\ \text{si } E \cap E' = \emptyset \end{cases}$

$E \cap E' = (E \cap E', W \cap W', +)$ (sous-espace affine)

$\begin{cases} \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \\ \text{si } E \cap E' = \emptyset \end{cases}$

$E \cap E' = \emptyset$ (vide)

$E \cap E' = P + (V \cap V' + (E \cap E')) = P + (V \cap V')$ (sous-espace affine)

$\begin{cases} \text{si } E \cap E' \neq \emptyset \\ \text{si } E \cap E' = \emptyset \end{cases}$