G1.234.63-Gaffino-3
Geometria - 12/03/2024

Spaz. affine: Sia $A=(\mathbb{R}^n, V)$ e $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ $(\dim V = n-1)$

- $\rightarrow$ $A_1 \vee \cdots \vee V$ $\Leftrightarrow$ $\{A_1, \dots, A_n\}$ indip.
- $\rightarrow$ $A_1 \vee \cdots \vee V$ $\Leftrightarrow$ $\{A_1, \dots, A_n\}$ dip. $\Leftrightarrow$ unico i per cui $A_i \in A_1 \vee \cdots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \cdots \vee A_n$

NOTE: $A \vee V = A(V+A)$

$\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_n$ base $\quad P = P + \sum_{i=1}^n a_i(P-A)$

$P_1, \dots, P_n$ $\quad P = A + \sum_{i=1}^n a_i(P_i - A)$

$\underline{\underline{\text{NOTE}}}$ $\quad P = A \vee \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Sottogruppi affini (= TRASLATI DI SOTTOSPAZI VETT) $\quad W = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n\}$

$\underline{\underline{\text{PROPRIETÀ}}}$ $\quad$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ indip.

Nota: due piani in $\mathbb{R}^3$: $\quad V \cap W^\perp \ (\dim = 0)$ (dunque)

$\Rightarrow \dim = 2$

$\Rightarrow \dim = 1$

$\Rightarrow \dim = 0$

Fatt: sia A sottospazio affine (linear, punto, retta, piano) $\Rightarrow \exists!\, B \perp A$ $(\dim = 0)$

Intersezione $\quad A = (\mathbb{R}^n, V)$

$P_1, \dots, P_n$ dim

$A_1 \dots A_n$ dim tali che $\sum d_i = n$

allora di punto in cui le A_i si intersecano è $a = \sum_{i=1}^n a_i(P_i - A) \qquad (a \in A)$

è punto di A che NON dipende da A_i, ma solo dai P_i, d_i.

Dunque punto di intersezione $\sum a_i P_i$

e se vale $\sum a_i = 1$ (ovvero P_i baricentri, ma vedi punto P_i con unità a_i) $\left(\sum a_i = 1 \right)$

(53) P_1, P_2 $\quad a P_1 + (1-a) P_2$ $\quad$ segno per P_1 $(a \geq 0)$

$P_1 \quad P_2 \quad a \quad 1-a$

$P_1 \quad P_2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

$P_1 \quad P_2 \quad 2 \quad -1$

$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 \quad a = 2/3$

punto medio!

Utilizzando ora il punto $B = a + \sum a_i (P_i - a)$

è unico $\Leftrightarrow$ $(b' = a' + \sum a_i (P_i - a))$ $\quad$ qualsiasi scelta di a, a'

In realtà $b = b'$

Infatti sottraendo:

$B - B \quad$ è vettore che è di vettore nullo

$\Rightarrow (a' + \sum a_i (P_i - a')) - (a + \sum a_i (P_i - a))$

$(a' + a) - (a + a)$

$(a' - a) + (a - a)$

(vettore che vale nulla! Non dipende dai punti singoli punti)

$\Rightarrow (a' - a) + \sum a_i (P_i - a') - \sum a_i (P_i - a)$

$(a' - a) + \sum a_i \underbrace{(a - a')}_{\text{indipendente da } i}$

$(a' - a) + \left(\sum a_i\right)(a - a')$

$(a' - a) + \left(\sum a_i - 1\right)(a - a') + (a - a')$

$(a' - a) + (a - a') = 0$

Nota per calcolare $\sum_{i=1}^n a_i$ (dove $\sum a_i = 1$)

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i (P_i - A) = \sum_{i=1}^n a_i (P_i - B) + \sum_{i=1}^n a_i (B - A)$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i (P_i - B) = \sum_{i=1}^n a_i (P_i - A) - \sum_{i=1}^n a_i (B - A)$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^n a_i (P_i - B) = \sum_{i=1}^n a_i (P_i - A) - (B - A)$

Dove $a_1, \dots, a_n$ fissano nuovo punto con $\sum a_i = 1$

Inoltre vale $a_i = \frac{d_i}{\sum d_i}$

$\left\{ \sum d_i P_i : \sum_{i=1}^n d_i = 1 \right\} = \left\{ P = \sum_{i=1}^n (P_i - B) + B : a_i \in \mathbb{R} \right\}$

$= \{ P_1 + (P_2 - P_1) + \dots + (P_n - P_1) : P_1 \in \mathbb{R}, P_2 \in \mathbb{R}, \dots, P_n \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \text{piani} : \text{i punti che si intersecano non dipendono dalla scelta di } P_i \}$

QUALCHE DIMOSTRAZIONE DIRECCIONE CHE DALL'ALGEBRA AFFINE:

$L \subseteq A$ è sottospazio affine $\Leftrightarrow$ L è chiuso per combinazione baricentrica

$\underline{\underline{\text{NOTA}}}$: $P_1, \dots, P_n \in L$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(\sum a_i = 1)$ allora $\sum a_i P_i \in L$

$\underline{\underline{\text{DIM}}}$: $\exists\, P_0 \in L$ e $A = P_0 + \text{sottospazio}$

Utilizzando ora il punto P_0 per calcolare $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ (dove $\sum a_i = 1$)

$\Rightarrow \sum a_i P_i = P_0 + \sum a_i (P_i - P_0)$

$\Rightarrow P_1 + a_2(P_2 - P_1) + a_3(P_3 - P_1) + \dots + a_n(P_n - P_1)$

$P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \dots + a_n P_n$

Dove $a_1, \dots, a_n$ fissano nuovo punto con $\sum a_i = 1$

Inoltre vale $a_i = \frac{d_i}{\sum d_i}$

$\left\{ \sum d_i P_i : \sum_{i=1}^n d_i = 1 \right\} = \left\{ P = \sum_{i=1}^n (P_i - P_1) + P_1 : a_i \in \mathbb{R} \right\}$

$= \{ P_1 + (P_2 - P_1) + \dots + (P_n - P_1) : P_1 \in \mathbb{R}, P_2 \in \mathbb{R}, \dots, P_n \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \text{piani} : \text{i punti che si intersecano non dipendono dalla scelta di } P_i \}$

QUALCHE DIMOSTRAZIONE DIRECCIONE CHE DALL'ALGEBRA AFFINE:

$L \subseteq A$ è sottospazio affine $\Leftrightarrow$ L è chiuso per combinazione baricentrica

$\underline{\underline{\text{NOTA}}}$: $P_1, \dots, P_n \in L$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(\sum a_i = 1)$ allora $\sum a_i P_i \in L$

$\underline{\underline{\text{DIM}}}$: $\exists\, P_0 \in L$ e $A = P_0 + \text{sottospazio}$

Utilizzando ora il punto P_0 per calcolare $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ (dove $\sum a_i = 1$)

$\Rightarrow \sum a_i P_i = P_0 + \sum a_i (P_i - P_0)$

$\Rightarrow P_1 + a_2(P_2 - P_1) + a_3(P_3 - P_1) + \dots + a_n(P_n - P_1)$

$P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + \dots + a_n P_n$

Dove $a_1, \dots, a_n$ fissano nuovo punto con $\sum a_i = 1$

Inoltre vale $a_i = \frac{d_i}{\sum d_i}$

$\left\{ \sum d_i P_i : \sum_{i=1}^n d_i = 1 \right\} = \left\{ P = \sum_{i=1}^n (P_i - P_1) + P_1 : a_i \in \mathbb{R} \right\}$

$= \{ P_1 + (P_2 - P_1) + \dots + (P_n - P_1) : P_1 \in \mathbb{R}, P_2 \in \mathbb{R}, \dots, P_n \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \text{piani} : \text{i punti che si intersecano non dipendono dalla scelta di } P_i \}$

Es calcolo baricentrico tra le ispezioni di DUCHES BUTTON:

$A_1 \in A$ $\quad d_1 \in \mathbb{R}$ $(\sum d_i = 1)$ $\quad B_1 = \sum d_i A_i$

$A_2 \in A$ $\quad d_2 \in \mathbb{R}$ $(\sum d_i = 1)$ $\quad B_2 = \sum d_i A_i$

$A_3 \in A$ $\quad d_3 \in \mathbb{R}$ $(\sum d_i = 1)$ $\quad B_3 = \sum d_i A_i$

$P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^n$, $\sum P_i = 1$

allora $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n (P_i - A) + A$

$= \sum_{i=1}^n (P_i - A_1) + A_1$

$= \sum_{i=1}^n (P_i - A_1) + \sum_{i=1}^n (A_1 - A)$

$= \sum_{i=1}^n (P_i - A_1) + \sum_{i=1}^n (A_1 - A)$

Utilizzo ora il punto iniziale:

$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n (P_i - A_1) + \sum_{i=1}^n (A_1 - A)$

$= \sum_{i=1}^n (P_i - A_1) + A_1$

Per caratteri di uguaglianza basta cambiare la ed utilizzare $\sum d_i = 1$ ottenere 0.

$\sum d_i B_i = \sum d_i (a_i - A)$

$(a + \sum d_i (B_i - a)) - (a + \sum d_i (a_i - a))$

$(a - a) + \sum d_i (B_i - a) - \sum d_i (a_i - a)$

$0 + 0$ (fatto)

Nota se $A_1, \dots, A_n$ sono rispettivamente affine un A allora per ogni punto $P \in A$ abbiamo

$P = A + \sum_{i=1}^n a_i (P - A_i)$ e $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_P(P)$

$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ a_1 - a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ \vdots \\ a_1 - a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{pmatrix} \right)$

allora $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ è detto "COORDINATE BARICENTRICHE" del P nel riferimento $A_1, \dots, A_n$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

COORD. AFFINE

Nota usando le coordinate baricentriche $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ punti soddisfano sempre $\sum a_i = 1$

Quindi un riferimento affine $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ $\xrightarrow{\text{NOTA}}$ $\begin{matrix} a_1 \vee a_2 \\ \vee \\ a_n \end{matrix}$

$a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = 0$ $\quad \begin{matrix} a_1 \\ \vee \\ a_n \end{matrix}$

un coordinate baricentriche ad ordine:

$\begin{cases} \sum a_i = 1 \\ a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} a_1 \\ \vee \\ a_n \end{matrix}$

$\begin{cases} \sum a_i = 1 \\ (a_1 + a_2) a_1 + (a_2 + a_3) a_2 + \dots + (a_n + a_1) a_n = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} a_1 \vee a_2 \\ \vee \\ a_n \end{matrix}$

NORMALE $\left(\begin{matrix} \text{equazione affine} \\ \text{non omogenea} \\ \text{nelle } a_i, \dots, a_n \end{matrix} \right.$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sum a_i = 1 \ (\text{non omogenea}) \\ \text{non dipende da } i \ (\text{linear}) \\ \text{equazione omogenea nelle } a_1, \dots, a_n \end{cases}$

Esempi: ① dati due punti distinti P, P_1.

Punti generici di $\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1$ (dimensione)

$(= P + \frac{1}{2}(P - P_1))$

$= a + \frac{1}{2}(P - P_1)$

$= B + \frac{1}{2}(B + P_1)$ $(a, B \in \mathbb{R})$

(Sempre che $2 \neq 0$, cioè $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$, $\text{char}(\mathbb{R}) \neq 2$)

② dati 3 punti P, P_1, P_2 non allineati.

determinare: P: punti $\{\text{dist baricentro}\}$

$P \in P_1 P_2$ sono $(\alpha, 1)$

per quali α è allineato $\Leftrightarrow$ 3 punti lineari?

$\Leftrightarrow$ determinare

Baricentro dei triangoli $= \frac{1}{3} P + \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2 = B$

allora allineato $\Leftrightarrow$ $\left(\text{rank}(B, P_1) = 1 \right)$

$\Leftrightarrow$ determinare B

$\Leftrightarrow$ 3 punti lineari $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ $\left(\begin{matrix} \text{dist baricentro} \\ \text{di lineari} \end{matrix} \right)$

Cioè punti allineati $\Leftrightarrow$:

$B = \frac{1}{3} P + \frac{1}{3} P_1$

$\frac{1}{3} P + \frac{1}{3} P_1 = \frac{1}{3}(\alpha P_1 + P_2)$

$\frac{1}{3} P + \frac{1}{3} P_1 = \frac{1}{3} \alpha P_1 + \frac{1}{3} P_2$

$\frac{1}{3} P + \frac{1}{3} P_1 = \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2$

se $P_1 \neq P_2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = 1$

Nota se $\text{char}(\mathbb{R}) = 2$ per ovvero $1 + \mathbb{R} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\text{char}(\mathbb{R}) = 2$

Cosa succede nel triangolo?

- tre mediane (punti medi dei lati)
- dovrà di baricentro: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ $\quad (\text{char}(\mathbb{R}) = 2)$

$B = P_1 + P_2 + P_3$

$B = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_3$

$B = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_3$

allora $B = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1$ $\quad B \in$ punto $P_1 \vee P_2$ $\quad$ (punto medio)

(Ma vale per $P \vee P_3$ punto medio del lato opposto, in un caso tra α di B...)

$B = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_2$ $\quad (= 1 \text{ in } \mathbb{R} \text{ assurdo})$

$\in$ punto per P_1, P_2 punto medio P_3 (punto per 3 medie)

$B = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ $\quad (1 \in \mathbb{R}$ assurdo$)$

$\in$ vale per punti medi di tutti segmenti (anche 3 vale che di α diversi non α di B...)

Se $\text{char}(\mathbb{R}) = 2$ allora $\exists$ punti medi $(2 - 1, \frac{1}{2} - 1 - 1)$

una volta $\alpha \neq$ baricentro $(3 - 1, \frac{1}{3} - 1)$

abbiamo le mediane

$P_1 \vee P_2$ $\quad P_1 = \frac{P_1 + P_2}{2}$

$P_2 \vee P_3$ $\quad$:

$P_3 \vee P_1$ $\quad$:

mediane

$\underline{\underline{\text{NOTA}}}$ la 3 mediane sono 3 punti paralleli!

$\underline{\underline{\text{ESERCIZIO}}}$: $m_1(\frac{1}{2}) \quad m_2(\frac{1}{2}) \quad m_3(\frac{1}{2})$

$(2, 1) + \frac{1}{2}(-1, \frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$

$(3, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-1, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$(1, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1, \frac{1}{2}) = (1, \frac{3}{4})$

$P_1 \vee m_1 = (\frac{3}{2}) + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}) = (\frac{2}{2})$

$P_2 \vee m_2 = (\frac{1}{2}) + (\frac{2}{1}) + (\frac{1}{2}) = (\frac{2}{2})$

$P_3 \vee m_3 = (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}) + (\frac{2}{1}) = (\frac{2}{2})$

$\left\{ \begin{matrix} x - y = 0 \\ x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{matrix} \right.$

Problema: spazio affine in: $\{$ Kompleks = 2 reale $\}$

Ipotesi: $\{$ 3 punti non allineati $\}$

$\{$ reale: $\}$ $\{$ 3 punti paralleli $\}$

$\{$ complessi: $\}$ $\{$ 3 punti generici $\}$

$\text{char}(\mathbb{R}) = 2$ $\quad \{\text{Kompleks}\}$

...

Esempio per ipotesi: P, P_1, P_2, P_3 non complanari $\quad \text{char}(\mathbb{R}) \neq 2$,

allora

$P_1 =$ punti medio $P, P_2 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1$

(lato $P_1 P_2$)

$P_3 = P_2 +$ baricentro di $P, P_1, P_2 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$

$P_3 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_3$

allora $P = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1$ $\quad P \in$ punto $P_1 \vee P_2$

(Ma vale per $P \vee P_3$ punto medio del lato opposto, in un caso tra α di B...)

$P = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P_2$ $\quad (1 \in \mathbb{R}$ assurdo$)$

$\in$ vale per punti medi di tutti segmenti (anche 3 vale che di α diversi non α di B...)

$P = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ $\quad (1, 1, 1 \neq 0$ assurdo$)$

$\in$ vale per punti medi di tutti segmenti (anche 3 vale che di α diversi non α di B...)

Nota Quando sono PRODOTTI AFFINI, di spazi affini, dato spazio vettoriale, e dati $\dim$ che sono rispettivamente k_1, k_2, k_3 ecc.

$\underline{\underline{\text{NOTA}}}$ dipendono dalla scelta dell'"ORIGINE" e "Linguaggio" che non dipende vettorialmente.

Punti: bisogna dunque sia tutti i campi in cui $k_1, k_2, k_3 \dots$ siano isomorfi $\Leftrightarrow$ $\dim$

Problema: spazio affine $\{$ Kompleks = 2 reale $\}$

Ipotesi: $\{$ 3 punti non complanari $\}$

$\{$ reale: $\}$ $\{$ 3 punti paralleli $\}$

$\{$ complessi: $\}$ $\{$ 3 punti generici $\}$

$\text{char}(\mathbb{R}) = 2$ $\quad \{\text{Kompleks}\}$

4 punti $ABCD$ centrali $\in$ la di rette costruite $\text{char}(\mathbb{R}) = 2$

allora: $A + B + C + D$ $\quad$ Ma $\begin{matrix} A + B + C \\ \text{punto medio} \\ \text{del lato opposto} \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix} \text{punto medio} \\ \text{delle diagonali} \end{matrix}$

$\text{char}(\mathbb{R}) = 2$

$\Leftrightarrow$ $A + B + C + D = A + (B + C) + D = A + (A + D) + D$

$A + A + D + D = 0 + 0 = 0$

Condizione equivalente $\Leftrightarrow$ $\text{char}(\mathbb{R}) = 2$

$A + B + C + D = 0$

$\Leftrightarrow$ vedere $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \text{sistema} \\ \text{lineare} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{di 4 equazioni} \\ \text{in 4 incognite} \end{matrix}$

$\begin{cases} (A + B + C) + D = 0 \\ A + (B + C + D) = 0 \\ (A + B) + (C + D) = 0 \\ (A + C) + (B + D) = 0 \end{cases