Problème: $A = (A, \times, +)$ représentable $A \cong \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ ou $A \cong (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$

donner les / quels $\mathbb{R}$-algèbres représentant A.

- construire explicit $\mathbb{C}$ ($A \cong \mathbb{R}^2$)
  $\varphi_{\mathbb{C}}(a) = \varphi_{\mathbb{C}}(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$
- construire $\mathbb{H}$ (quaternions) ($A \cong \mathbb{R}^4$)
  $1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $i \mapsto \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$, $j \mapsto \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$, $k \mapsto \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$
- construire $\mathbb{O}$ (octonions) : $\mathbb{O} \cong \sum_{i=0}^{7} \mathbb{R}\, e_i$ $\quad (\mathbb{R}\, e_i \cong \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &\cong \mathbb{H} \oplus \sum_{i=4}^{7} \mathbb{R}\, e_i \\ &\cong (\mathbb{R} \oplus \sum_{i=1}^{3} \mathbb{R}\, e_i) \oplus (\sum_{i=4}^{7} \mathbb{R}\, e_i) \\ &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

Problème: résoudre équations & systèmes linéaires représentations

- $\mathbb{R}$: $\qquad ax + b = 0$
- $\mathbb{C}$: $\qquad ax + b = 0$
- $\mathbb{H}$: $\qquad ax + b = 0$

Quadrangulaire explicit sur $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & & c \\ a & & \\ & \bar{b} & \end{array}$$

$\bar{b}$ conjugué de b (inverse), puisque ab & $\bar{b}\bar{a}$:

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & & c \\ \bar{a} & & \\ & \bar{b} & \end{array}$$

Cette représentation n'est pas (bien quadrangulaire) ?
Il manque de représentation, indication de quadrangulation...

Transformations Affines et Projectives

Déf: $F : A \to A'$ fonctions tels que tous triplets (a, b, c) vérifie **TRIANGLE AFFINE** ou "Théorème de calcul barycentrique", càd :

$\forall (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}$ tels que
$\forall a_1, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$ $(\sum \xi_i = 1) : F(\sum \xi_i a_i) = \sum \xi_i F(a_i)$
& ξ_i des **POINTS** de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ & $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.

Observation: Toutes les combinaisons par degrés des points $F(\sum \xi_i a_i) = \sum \xi_i F(a_i)$ $\quad \forall \xi_i \in \mathbb{R}$, $\forall a_i \in A$ (ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$)

(sur quadrangulation $\mathbb{R}^4$ combinaisons (càd) impossible. Mais des points différents sur points différents : vocabulaire, définition)

Déf: soit $F : A \to A$ & $\mathbb{R}$-fonctions

si $F : A \to A$ tel que $\forall a \in A$, $G : A \to A$ tel que alors $G \circ F : A \to A$ est affine

si $F : A \to A$ affine, alors $F' : A \to A$ (même $\mathbb{R}$-algèbre) tel que $F' \circ F = \mathrm{id}_A$ (pseudo-inverse)

Donner démonstration des différentes propriétés :

$F : A \to A'$ $\quad A = (A, \times, +)$ $\quad$ les triplets $\mathbb{R}$
$A' = (A', \times', +')$ $\quad$ (ex. $F(a \times b) = F(a) \times' F(b)$ $\forall a, b$, $\forall a, b \in A$ & $\forall \lambda \in \mathbb{R}$)

Si $F : V \to V'$ dérivable (i.e. linéaire) & vaut cet pseudo.

Considérons :

(1) $F(v + v') = F(v) + F(v')$ $\quad \forall v \in V$, $\forall v' \in V$ $\quad$ (ex. $T(\xi v + \xi_2 v_2) = T(\xi v) + \xi_2 T(v_2)$)

Mais :

(2) $F(\xi v) = \xi F(v)$ $\quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad$ Toute vraie $v = P - E$ donne $\xi v = P - E$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad$ Toute fausse

Démonstrations mais :

- $F \circ T$ $\mathbb{R}$-affine, $A \to A'$
- F fonctions affines, $A \to A'$
  affine
  $F \circ T \circ T \circ F$ $\quad$ $F \circ T$ composition

Démonstration mais :

- F & T $\mathbb{R}$-affine, $A \to A'$
- F fonctions affines, $A \to A'$
  affine
  $F \circ T \circ T \circ F$ $\quad$ $F \circ T$ composition

Mais :

$F : A \to A'$ $\quad$ $A = (A, \times)$ $\quad$ les triplets $\mathbb{R}$
$A' = (A', \times')$ $\quad$ (ex. $F(a \times b) = F(a) \times' F(b)$ $\forall a, b$, $\forall a, b \in A$)

Si $F : V \to V'$ dérivable (i.e. linéaire) & vaut cet pseudo.

Considérons :

(1) $F(v + v') = F(v) + F(v')$ $\quad \forall v \in V$, $\forall v' \in V$ $\quad$ (ex. $T(\xi v + \xi_2 v_2) = T(\xi v) + T(\xi_2 v_2)$)

Mais :

(2) $F(\xi v) = \xi F(v)$ $\quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

(1) $\Rightarrow$ (2) $\quad$ Toute vraie $v = P - E$ donne $\xi v = P - E$

(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad$ Toute fausse

Mais : toute application $\mathbb{R}$-affine $A \to A'$ $\mathbb{R}$-affine.

Mais : $G \circ F : A \to A'$ $\mathbb{R}$-affine & $\mathbb{R}$-affine $A \to A'$ $\mathbb{R}$-affine.

Si $F : A \to A'$ injectif, alors $F' : A' \to A$ (même $\mathbb{R}$-algèbre) $\quad$ (pseudo-inverse)

Mais : $F \circ F' = \mathrm{id}_{A'}$ $\quad$ $F' \circ F = \mathrm{id}_A$

Déf: soit $F : A \to A$ & $\mathbb{R}$-fonctions

si $F : A \to A$ tel que $\forall a, b \in A$, $G : A \to A$ tel que alors $G \circ F : A \to A$ est affine

Si $F : A \to A'$ injectif, alors $F' : A' \to A$ (même $\mathbb{R}$-algèbre) $\quad$ (pseudo-inverse)

Mais : $F \circ F' = \mathrm{id}_{A'}$ $\quad$ $F' \circ F = \mathrm{id}_A$

Mais : $F \circ F' = \mathrm{id}_{A'}$ $\quad$ $F' \circ F = \mathrm{id}_A$

Mais : $F \circ F' = \mathrm{id}_{A'}$ $\quad$ $F' \circ F = \mathrm{id}_A$

Représentations Vectorielles et Trait Affines :

$A, \mathbb{R}$ algèbre
$A', \mathbb{R}$ algèbre
alors on donne définissons trait :

$F(\xi v) = \xi F(v)$ $\quad$ (v, ψ)

$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Aff}(A, A')$ $\quad$ $V \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$

$\begin{cases} F : A \to A' : (v, \psi) \\ A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{\psi} A' \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \xi \in \\ \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (v, \psi) \\ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \end{cases}$

$F(v) = F(\xi v_1) + F(v_2) = \xi F(v_1) + F(v_2)$ $\quad$ $\underbrace{F(\xi v_1)}_{\xi F(v_1)} + F(v_2)$

et

$\mathrm{Aff}(A, A')$ $\quad$ $V \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$

$\{F : A \to A' \text{ affine}\}$

ou il dérive de la manière $F \longrightarrow (F(a) - F(\xi), \psi)$
F définie de $\longrightarrow (v, \psi)$
$F(v) = F(\xi + v) = \xi + v + F(v)$
$\xi + v + F(v)$

Mais bien sûr, mais bien sûr autre, une fois différentielle Cartan, les composantes sont tout différent : les Matrice dérivée, Jacobienne $V \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$

Note: Sachant que F^{-1} correspondance de couple (v, ψ)

$\overset{\text{REPRÉ}}{\text{dérivée}}$ $\quad$ $\overset{\text{REPRÉ}}{\text{dérivée}}$

dérivée F F $\in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$

$(v, \psi) = (v, \mathrm{id}) \circ (0, \psi)$

$\underset{F \text{ un } \mathbb{R}\text{-aff}}{\text{TRANSLATION}}$ $\quad$ $\underset{\text{REPRÉ}}{\text{REPRÉ