# Geometria Euclidea ($\mathbb{R}$), Hermitiana ($\mathbb{C}$)

Sfondo: Ci sono due strumenti nel nostro (Geometria, algebra, analisi, calcolo ...) su

- SPAZI VETTORIALI (Sfondo lineare)
- SPAZI AFFINI (Sfondo affine)

Elementi $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ (Scalari)

Elementi (Vettori)$_{\mathbb{R}/\mathbb{C}}$

Elementi (Punti)

CASO REALE per $\mathbb{R}$ (anche $\mathbb{Q}$ o altri campi ordinati (Cauchy))

**Definizione** su $V_n(\mathbb{R})$ vi introduciamo una nuova operazione "PRODOTTO SCALARE" = "DOT PRODUCT" "Prodotto scalare" = "indentato di il campo base"

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto v \cdot w = (v_1, \dots, v_n)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

$V_n(\mathbb{R})$ con $\cdot$ = Sp. vett. Euc. (Standard)

**Notazione**: $v \cdot w = v \cdot w = (v, w) = \langle v | w \rangle$

**Nota**: nella definizione di $\langle\cdot|\cdot\rangle$ usiamo vi nella rappresentazione in una base canonica (quella vicina in coordinate in base canonica)

**Prop-def** di $\cdot$: $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \longmapsto v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

Cosa chiedo una funzione sfondo da $V \times V$ su $V \times V$?
$\Psi(v, w) = (v_1 w_1, \dots) = \Psi(v, w) = \Psi(w, v)$
(Prod. vettori)

(1) + (2) Bilineare: $\cdot : (\lambda v_1 + \mu v_2) \cdot w = \lambda v_1 \cdot w + \mu v_2 \cdot w$
$(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$
(ovviamente, perché lavoriamo in spazi commutativi di prodotto di numeri reali: $\lambda(v_1 w_1) + \lambda(v_2 w_2) \dots$)

nota: $(\lambda v_1 + \mu v_2) \cdot w = \sum_i (\lambda v_{1i} + \mu v_{2i}) w_i = \sum_i (\lambda v_{1i} w_i + \mu v_{2i} w_i) = \lambda \sum_i v_{1i} w_i + \mu \sum_i v_{2i} w_i = \lambda v_1 \cdot w + \mu v_2 \cdot w$

Usiamo sempre nuovamente LINEARITÀ (Conseguenza $\begin{matrix} v \cdot w = 0 \\ v \cdot \dots = 0 \end{matrix}$ $\forall v$, $v \cdot \dots = 0$ $\forall \dots$)

(3) Simmetria: $v \cdot w = w \cdot v$ $\left(\sum x_i y_i = \sum y_i x_i\right)$

$v \cdot w = \sum x_i y_i$
$\sum y_i x_i$

(4) non degenere: Se: $v \cdot w = 0$ $\forall v$ o/ $w$ $\Rightarrow w = 0$ dim: Vado avanti $\forall v$ di base, per es $v = e_1, e_2, \dots, e_n$ perché $v \cdot w = 0$ $\forall v$.

$e_1 \cdot w = y_1 \cdot w = 0$
$e_2 \cdot w = y_2 \cdot w = 0$
$e_n \cdot w = y_n \cdot w = 0$

nota: è possibile avere $v \cdot w = 0$ e $v \cdot w = 0$ senza che $v = e_1$, $w = e_1$: $e_1 \cdot e_1 = 0$.
(Comunque vedremo dopo).

(5) positività: $v \cdot v \geq 0$ $\forall v$, ed se $v \cdot v = 0$ solo se $v = 0$ dim: Usiamo il teorema sul campo $\mathbb{R}$.
(Usiamo $\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$
e definiamo $\|\cdot\| : V_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$v \longmapsto \|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum x_i^2}$
Norma o lunghezza
Funziona con proprietà:
- $\|v\| = 0$ se $v = 0$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

(nota: (5) $\Rightarrow$ (5) $v \neq 0 \Rightarrow v \cdot v > 0$ $v \neq 0$)

(6) Teorema (Disuguaglianza) di CAUCHY-SCHWARTZ: dim: vogliamo che positivo per ogni $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$(v + \lambda w) \cdot (v + \lambda w) \geq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$v^2 + 2\lambda v \cdot w + \lambda^2 w \cdot w \geq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\lambda^2 \underbrace{w \cdot w}_{A \geq 0} + \underbrace{2 v \cdot w}_{b} \lambda + \underbrace{v \cdot v}_{c} \geq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$(v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v)^2 (w \cdot w)$ e vale se e solo se $v, w$ sono dip. lineare
cioè $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (modulo quindi positivo)

$(\langle v | w \rangle)^2 \leq (\langle v | v \rangle)(\langle w | w \rangle)$ ?

$\Delta \leq 0$
$(v \cdot w)^2 - (v \cdot v)(w \cdot w) \leq 0$
$(v \cdot w)^2 \leq (v \cdot v)(w \cdot w)$
(dobbiamo verificare $\Rightarrow$). ($\Delta = 0$: $\exists \lambda$ tale $(v + \lambda w) \cdot (v + \lambda w) = 0$
$\exists \lambda$ t.c. $\lambda v \cdot v + w \cdot v = 0$
$v, w$ dipendenti.)

---

Esercizio-casa di CS:

(a) Norma di vettori: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

$V = V_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$v \longmapsto \|v\|$

proprietà: $\|v\| = 0$ se $v = 0$ $(\|v\| > 0)$ INTEGRITÀ
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ $(\sqrt{(\lambda v)^2} = \sqrt{\lambda^2 (v \cdot v)} = |\lambda| \sqrt{v \cdot v})$
$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

- CHIARI: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v \cdot w)$
perché $\|v + w\|^2 = (v + w) \cdot (v + w)$
$= v \cdot v + 2 v \cdot w + w \cdot w$
$\|v\|^2 \quad \|w\|^2$

Uno $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) Subadd.: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
perché $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2(v \cdot w) + \|w\|^2$
$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$
$\leq (\|v\| + \|w\|)^2$
e si fa con che $\sqrt{\cdot}$

(b) definizione angolo tra due vettori tra 2 vettori:

$v, w \in V = V_n(\mathbb{R})$: $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

cioè $\frac{|v \cdot w|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$
cioè $\boxed{-1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1}$ ha senso.

definizione: con $\Psi(v, w) := \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$ dunque tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (sottospazio = $\Psi(v, w) \in [-1, 1]$, quindi posso fare un vettore un elemento dato con $\Psi(v, w)$, con l'angolo dato, e di più $\Psi(v, w)$ è univoco...)
(e $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ definizione $\sin\theta \geq 0$ nasce da $\Psi$).

25/03/2024

Nota da definizione di $\Psi$ si specifica data, quando ci chiedo della formula di addizione:

$\cos^2 = 2\cos^2\theta - 2\sin\cos$

usando $\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$

$c^2 = 2\frac{(v \cdot w)^2}{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2} - 2\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \cdot \sin\theta$
$= 2\frac{(v \cdot w)^2}{a^2 \cdot b^2} - 2\frac{v \cdot w}{a \cdot b} \cdot \sin\theta$ $\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos\theta(v, w)\right)$

Vettore $\frac{v}{\|v\|}$ $\frac{w}{\|w\|}$

In particolare: $\Psi(v, w) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$ se $v, w$ ortogonali se $v \cdot w = 0$ se $v \cdot w = 0$

(c) definizione: $v \perp w \Leftrightarrow v \cdot w = 0$ (ORTOGONALITÀ TRA VETTORI!) $\Leftrightarrow \cos\Psi(v, w) = 0$

---

ORTOGONALITÀ su $V_n(\mathbb{R})$:

Def: $v \perp w$ se $v \cdot w = 0$ (se $\cos\Psi(v, w) = 0$)

(nota: se $v = 0$ o $w = 0$ allora $v \perp w$, ed se $v \neq 0$ allora: $v \cdot w = 0 \Rightarrow v = 0$ $(v \neq 0)$)

Nota: $v, w$ hanno $\|v\| = 1$ allora $v, w$ sono ortogonali. Infatti: $\frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{w}{\|w\|} = 0$ allora $v \cdot w = 0$
$\frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{w}{\|w\|} = 0 \Rightarrow v \cdot w = 0$
$\Leftrightarrow v \cdot w = 0$ $\Rightarrow \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{w}{\|w\|} = 0$
per vettori zero?
$v_1, \dots, v_n \in V$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (v. in $V_n$), non nulli, allora sono ortogonali.

- Dal teorema del coseno/coseni:

$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\Psi(v, w)$
se $\pm = +$, cioè $v \perp w \Rightarrow$ Stesso.
$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
(teorema di Pitagora)

- PROIEZIONE ORTOGONALE nella definizione di un vettore $v \neq 0$.

$\forall w \in V_n(\mathbb{R})$ esiste unica $w = w_\parallel + w_\perp$ con $w_\parallel \in \langle v \rangle$, $w_\perp \perp v$

perché $w_\parallel = a v$ e troviamo $a \in \mathbb{R}$ imponendo che
$w = a v + w_\perp$ $\perp v$
cioè
$(w - a v) \cdot v = 0$
$w \cdot v - a \frac{v \cdot v}{v \cdot v} = 0 \Rightarrow a = \frac{w \cdot v}{v \cdot v}$
conclusione: $w_\parallel = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$
$w_\perp = w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$

(nota: $w \cdot w_\perp = v \cdot (w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v) = w \cdot w - \frac{(w \cdot v)^2}{v \cdot v} \cdot v \cdot v$)

$w_\parallel = \|w\| \cos\Psi(v, w) \frac{v}{\|v\|} = \|w\| \frac{w \cdot v}{\|v\| \cdot \|w\|} \frac{v}{\|v\|} = \frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v$
$w_\perp = w - \frac{w \cdot v}{\|v\|^2} v$

Osservazione: Proiezione di $w \in V$ su $\langle v \rangle$ $\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ e $\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ $\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ $\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$

$\pi_v(w) = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$
$\pi_v(\pi_v(w)) = \pi_v(\pi_v(w))$
$= \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$
$\pi_v(\pi_v) = \frac{\pi_v}{\|v\|^2}$

---

Def: $v_1, \dots, v_n$ base di $V_n(\mathbb{R})$ si dice:
ORTOGONALE se $v_i \cdot v_j = 0$ $\forall i \neq j$
ORTONORMALE se $v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$
(ORTOGONALE $\Rightarrow$ $\|v_i\| = 1$)

Nota: Da base canonica è ortonormale (per definizione del $\cdot$):
$e_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$e_1 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

Osservazione: i sistemi sono basi ortogonali/ortonormali: perché:

1. se $v_1, \dots, v_n \in$ b.o. (base ortogonale) allora $\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}$ è b.o.n. (base ortonormale)
infatti $\frac{v_i}{\|v_i\|} \cdot \frac{v_j}{\|v_j\|} = \frac{v_i \cdot v_j}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} = \frac{v_i \cdot v_j}{\|v_i\|^2} = 0$
2. a partire da una base qualsiasi di $V_n(\mathbb{R})$ si può ottenere una b.o. ortonormale con la procedura detta GRAM-SCHMIDT

Sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ la base del $V_n(\mathbb{R})$ vogliamo costruire canonica una b.o.
$w_1, w_2, \dots, w_n$ tale che
$\langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$
$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

(1) $w_1 = v_1$
(2) $w_2 \perp w_1$ $\in \langle v_1, v_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$
$w_2 = v_2 - \pi_{w_1}(v_2)$
$= v_2 - \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} w_1$

(3) $w_3 \perp w_1, w_2$ $\in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$
$w_3 = v_3 - \pi_{w_1}(v_3) - \pi_{w_2}(v_3)$
$= v_3 - \frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} w_2$
se vado a sinistra dove $\in w_1, w_2$
e cambiamo in $v_1, v_2, v_3$
$e_1, e_2, e_3$.
$\vdots$
(k) $w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \pi_{w_i}(v_k) = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i \cdot v_k}{w_i \cdot w_i} w_i$

alla fine $w_1, w_2, \dots, w_n$ sono b.o. di $V_n(\mathbb{R})$
perché sono 2a2 ortogonali per costruzione
e inoltre $\in$ span
(dimensione $n$) $\Rightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ equivalente.

Pratica: Bisogna una base che dia una diagonalizzazione da pratica dei vettori $v_1, \dots, v_p$

---

ORTOGONALITÀ TRA SOTTOSPAZI E RELAZIONI CON DUALI:

Def: Se $W \leq V_n(\mathbb{R})$ definiamo $W^\perp \leq V_n(\mathbb{R})$
$W^\perp = \{v \in V_n(\mathbb{R}) : v \perp w \ \forall w \in W\}$
(ORTOGONALE)
Facile vedere che $W^\perp \leq V_n(\mathbb{R})$
(Come se $W$ fosse sottospazio e proiezioni)

Nota se $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$
allora $W^\perp = \{v \in V_n(\mathbb{R}) : v \cdot w_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$
(vettori che vanno ortogonali su una base di $W$)

Affermo: $\perp : \text{Sottosp}(V) \longrightarrow \text{Sottosp}(V)$
$W \longmapsto W^\perp$
con la seguente proprietà:

(1) $\{0\}^\perp = V$
$V^\perp = \{0\}$
(2) $W \subseteq W^\perp \Rightarrow W^\perp \geq W^{\perp\perp}$ (ricorda le facoltà ...)
se $v \in W^\perp$
$v \cdot w = 0$ $\forall w \in W$
$v \cdot w = 0$ $\forall w \in W$
$v \in W^\perp$
(3) $\dim(W^\perp) = n - \dim W$
se $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ dim $W = k$
allora $W^\perp = \{v : v \cdot w_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$
dato che ho $k$ equazioni lineari omogenee
dim $W^\perp = n -$ dipendenti $= n - \dim W$
(4) $(W^\perp)^\perp = W$ perché una inclusione è data (2)
($W^\perp \perp$ è $\perp$ $\Rightarrow$ $W^{\perp\perp} \geq W$)
dunque $W \leq (W^\perp)^\perp$
ma siccome stesse dimensioni
$\dim(W^{\perp\perp}) = n - \dim W^\perp$
$= n - (n - \dim W) = \dim W$.
(5) $(W \cap W^\perp)^\perp = W^\perp + W^{\perp\perp}$ (Gra(2))
$(W + W^\perp)^\perp = W^\perp \cap W^{\perp\perp}$
(6) decomposizione ortogonale:
$\forall W \leq V$ abbiamo $V = W \oplus W^\perp$
perché $W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$
e $\dim(W + W^\perp) = \dim V$ ⊛
quindi abbiamo $V = W + W^\perp$
poiché $w \in W$
$w = \sum a_i w_i$
$w_1, \dots, w_n$ base di $W$ (ortonormale)
la condizione $w \in W^\perp$ $w \cdot w_j = 0$ $\forall j$
allora $(\sum a_i w_i) \cdot w_j = 0$
implica $a_j = 0$ $\forall j$
poiché $w \in W$
$w \in W^\perp$ $\Rightarrow w \cdot w = 0$ $\Rightarrow w = 0$
$\forall w \in W$
e per quel $W \subseteq V$, $W^\perp \subseteq$ complementare di $W^\perp$.

Problema: Proiezione polari sul proiettore e biunivoche ortogonale su $V_n(\mathbb{R})$.
Sempre da proiezione/pseudoinversa con cui
dato $w \in W$
determinare $w^\perp$ $\left(\begin{matrix} w \in W \\ v \in V \end{matrix}\right)$

$\pi_W : V \longrightarrow W$
$v \longmapsto \pi_W(v)$
$\pi_W(\pi_W) = \pi_W$

Problema: se $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ linear. con $v$ proiettare $v$ su proiettare del $\pi_W$ ?

Osservazione: se $A = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ $\boxed{A}$
allora la equazione del $\pi_W$ sono date da $A^T \cdot \boxed{\ }$
perché $w^\perp : \begin{cases} w_1 x = 0 \\ w_2 x = 0 \\ \dots \\ w_k x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} w_1^T x = 0 \\ w_2^T x = 0 \\ \dots \\ w_k^T x = 0 \end{cases}$
e il problema $\boxed{A^T A} \cdot \boxed{x} = \boxed{\ }$ $\boxed{\text{rank}(A)}$ perché $\text{rank}(A^T A) = 0$
dunque
$\boxed{\pi_W(x^T) = A(A^T A)^{-1} A x}$
perché è l'unica matrice con la proprietà
$\begin{cases} \pi_W(x^T) \cdot w^T = 0 & \forall w \in W^\perp \\ \pi_W(x^T) \cdot w = w & \forall w \in W \end{cases}$ $A(A^T A)^{-1} A^T = A$
$A(A^T A)^{-1} A^T = A$ (Proiezione ortogonale)

Esercizio: esiste una funzione $\pi$ tale quale esiste per $W$ con $\dim W = r$ (U, W complementi tra di loro?)
Usando proiezioni su $W$
equazioni cartesiane su $U$.
In pratica trovo $A$ = matrice della proiezione $\pi$ dato quindi $W$ $\boxed{\text{compo}}$
$B$ = matrice delle equazioni $\pi_U$ cartesiane di $U$ $\boxed{\text{compo}}$
allora $V \oplus U \Rightarrow BA \in GL_n(\mathbb{R})$
$\pi_U(\pi_W^T) = A(BA)^{-1} B$
perché $A(BA)^{-1} B \cdot A = 0$
$A(BA)^{-1} B \cdot A = A_p$

---

Pb. Ortogonale: Per $\mathbb{R}^n$: calcolare ortogonale tra sottospazi
$U, U' \leq \mathbb{R}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ come spazio affine euclideo
$d(U, U') := \inf_{\substack{P \in U \\ P' \in U'}} d(P, P') = \min_{\substack{P \in U \\ P' \in U'}} d(P, P')$
$\Downarrow$ $d(Q, Q')$ dove $Q \in U$, $Q' \in U'$, $Q - Q' \perp W, W'$

Perché? dobbiamo trovare due spazi per $W, W_2$ e che la loro somma è uguale (cioè $W + W' = \mathbb{R}^n$)

$P - P' \in V = (V + W) \oplus (V + W')^\perp$
$\Downarrow$
$(v + w') \pm$
$(P - Q) = (P - v) \Rightarrow \in (V + W)^\perp$
$Q' = P' + v$ $\in P' + v$
Nuovamente di nuovo $\Rightarrow$ $\|P - P'\|$
ora: $\|P, P'\|$: $d(P, P') = \|P - P'\|$
$= \|(v + w) - (v' + w')\|$
$= \|(v - v') + w - w'\|$
$= \sqrt{\|(v - v')\|^2 + \|w - w'\|^2}$
$\geq \|v - v'\| = d(Q, Q')$

$d(P, P') \geq d(Q, Q') + \|w\|^2$
$\geq d(Q, Q')$

22/03/2024