G1-234-72-GEuclidea-2

giovedì 28 marzo 2024 08:07

Riassunto:

dot product:

• : $V \times V \to \mathbb{R}$

$(v, w) \mapsto v^t w =: v \cdot w$ — si usa base canonica di $\mathbb{R}^n = V_n(\mathbb{R})$

bilin. non deg. positiva → $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ ⟶ teorema Carnot Coseni, teorema Pitagora; → $\le$ C-S ⟶ $\cos\theta(v,w)$; $|v \cdot w| \le \|v\| \cdot \|w\|$ — { dist ..., ang ... }

$V \xrightarrow{\chi} V^*$, $v \mapsto (w \mapsto v \cdot w)$, $V \to \mathbb{R}$ — isomorfismo ⇒ $\mathcal{S}(V) \xrightarrow{\chi} \mathcal{S}(V^*)$, $U \mapsto \chi(U)$

anti-isomorfismi involutori di reticoli:

$\perp: \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(V)$, $W \mapsto W^\perp \le V$, $= \{v \in V : v \cdot w = 0 \ \forall w \in W\}$

$\perp: \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(V^*)$, $W \mapsto W^\perp \le V^*$, $= \{\varphi \in V^* : \varphi(W) = 0\}$

$\chi(W^\perp) = W^\perp$

$v \perp w$ sse $v \cdot w = 0$ sse $v \in \langle w \rangle^\perp$ sse $w \in \langle v \rangle^\perp$ ⟶ vettori 2 a 2 ⊥ sono l. indip. ⟶ b. ortogonale; b. ortonormale: $v_1 \dots v_n \in V_n(\mathbb{R})$: $v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ 1 & i = j \end{cases}$ (δ di Kronecker)

se $v_1 \dots v_n$ è b.o.n. e $\alpha_{v,\mathcal{E}}(id) = A$ matrice di cambiamento di base

allora: $A = (\alpha_{\mathcal{E}}(v_1) \dots \alpha_{\mathcal{E}}(v_n)) = (v_1 \dots v_n)$

otteniamo (GRAM) $A^t A = \begin{pmatrix} v_1^t \\ v_2^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} v_1^t v_1 & v_1^t v_2 & \dots \\ & v_i^t v_j & \end{pmatrix} = (v_i \cdot v_j) = (\delta_{ij}) = \mathbb{1}$

$A^t A = \mathbb{1}$ sse $A^{-1} = A^t$ — MATRICI ORTOGONALI!

Se $v_1 \dots v_n$ è bon, e $v \in V$ allora $v = \sum \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_v(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

e risulta $\alpha_i = v \cdot v_i$

perché $v \cdot v_j = (\sum_i \alpha_i v_i) \cdot v_j = \sum \alpha_i v_i \cdot v_j = \alpha_j$

cioè $v = \sum_{j=1}^{n} (v \cdot v_j) \cdot v_j$ se $v_1 \dots v_n$ è b.o.n. PARSEVAL

se $\mathcal{V}$ base ortonormale, $v \in V_n(\mathbb{R})$

$v = \mathcal{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ come $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{V} = \mathcal{E}\,\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{E}}(id)$; $v = \mathcal{E} A$; $(v_1 \dots v_n) = (e_1 \dots e_n) A$ b.on.; $\mathcal{E} = \mathcal{V} B$, $B = A^{-1} = A^t$

$= \mathcal{V} B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{V}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ coordinate di v nella base $\mathcal{V}$ $= \alpha_{\mathcal{V}}(v)$; $BX = X'$

$X' \cdot Y' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = X'^t Y' = (A^t X)^t (A^t Y) = X^t A A^t Y = X^t Y = X \cdot Y$

$A^t A = \mathbb{1} \Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow A A^t = \mathbb{1}$

Morale: il • si può calcolare usando le coordinate dei vettori in qualsiasi base ortonormale, non necess. la base canonica.

(E solo in b.o.n.: se A matrice cambiamento di base, $X' = AX$ allora: $X'^t Y' = (AX)^t AY = X^t A^t A Y$ è $= X^t Y$ per ogni X, Y sse $A^t A = \mathbb{1}$ (($X^t A Y = X^t B Y \ \forall X, Y \Rightarrow A = B$)) sse le colonne di A sono b.o.n. ....)

(n=1) b.on. di $\mathbb{R}$: ± 1

(n=2) b.on di $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ vettore $\|\cdot\| = 1$; $\begin{pmatrix} \pm\sin\theta \\ \mp\cos\theta \end{pmatrix}$ ⊥ al precedente

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ det = 1, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ det = −1

(n=3) esercizio: ortonormalizzare alla G-S: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ?, ?

CROSS-PRODUCT, prodotto vettore:

$V = V_n(\mathbb{R})$ (potrebbe essere $\mathbb{K}$ qualsiasi se non usiamo proprietà dell'ordine)

cross: $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n-1} \longrightarrow V$

$\mathrm{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) := \begin{vmatrix} e_1 & \\ e_2 & v_1 \dots v_{n-1} \\ \vdots & \\ e_n & \end{vmatrix} = e_1 |?| - e_2 |?| + e_3 | \ | \dots + (-)^{n+1} e_n |?| =$

determinante sviluppato secondo la prima colonna $= \begin{pmatrix} \text{minori massimi (ord } n-1) \\ \text{segnati della matrice} \\ \text{dei vettori } v_1 \dots v_{n-1} \end{pmatrix}$

equivalentemente, $\mathrm{cross}(v_1, \dots, v_{n-1})$ è l'unico vettore di $V_n(\mathbb{R})$ tale che:

$\forall w \in V_n(\mathbb{R})$ si ha $w \cdot \mathrm{cross}(v_1 \dots v_{n-1}) = |w \ v_1 \dots v_{n-1}|$

sviluppo per Laplace del determinante! — prodotto misto di • e cross. — volume del parallelepipedo generato dai $w v_1 \dots v_n$: $\{\sum \alpha_i v_i \mid 0 \le \alpha_i \le 1\}$, $v_0 = w$

(n=1) usiamo n−1 = 0 vettori ($\{\emptyset\} \to V$, $\emptyset \mapsto 1$): $\mathrm{cross}(\emptyset) = |1| = 1$

(n=2) usiamo n−1 = 1 vettore ($V \to V$): $\mathrm{cross}(v) = \begin{vmatrix} e_1 & x \\ e_2 & y \end{vmatrix} = y e_1 - x e_2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

(n=3) usiamo n−1 = 2 vettori ($V \times V \to V$): $\mathrm{cross}(v, w) = v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & x & x' \\ e_2 & y & y' \\ e_3 & z & z' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ -xz' + x'z \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

(n=4) usiamo n−1 = 3 vettori ($V \times V \times V \to V$)

Proprietà del cross:

(1) $\mathrm{cross}(v_1 \dots v_{n-1}) = 0$ sse $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono lin. dip. (perché il rango di $(v_1 \dots v_{n-1})$ è $< n-1$ sse tutti i minori d'ordine n−1 si annullano!) oppure: det = 0 sse le colonne sono lin. dip.

$\mathrm{cross}(v_1 \dots v_{n-1}) \ne 0$ sse $v_1 \dots v_{n-1}$ sono lin. indep.

(2) multilineare: $\mathrm{cross}(v_1, \dots \sum_j \alpha_j w_j, \dots v_{n-1}) = \sum_j \alpha_j \mathrm{cross}(v_1 \dots, w_j, \dots v_{n-1})$

cioè è lineare in ogni argomento FISSATI gli ALTRI! (perché il det è multilineare!)

(3) alternante: cross = 0 se due vettori sono =

oppure $\mathrm{cross}(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_{n-1}) = -\mathrm{cross}(v_1 \dots v_j \dots v_i \dots v_{n-1})$

oppure: $\mathrm{cross}(v_{\sigma_1} v_{\sigma_2} \dots v_{\sigma_{n-1}}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{cross}(v_1 \dots v_{n-1})$ per ogni permutazione $\sigma \in S_{n-1}$

(proprietà del determinante!)

(4) ortogonalità: $\mathrm{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) \perp v_i$ ($\forall i$) (ortogonale a tutti i suoi argomenti!)

perché $v_j \cdot \mathrm{cross}(v_1 \dots v_{n-1}) = |v_j \ v_1 \dots v_{n-1}| = 0$

cross è vettore ⊥ a $\langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$ = iperpiano dà i coefficienti dell'equazione di H!

(5) TEOREMA DI LAGRANGE: norma del cross:

$\|\mathrm{cross}(v_1, \dots, v_{n-1})\|^2 = \det(v_i \cdot v_j) = \prod_{i=1}^{n-1} \|v_i\|^2 \cdot \det(\cos\theta(v_i, v_j))$

$= \sum \begin{pmatrix} \text{minori ordine} \\ \text{massimo della} \\ (v_1 \dots v_{n-1}) \end{pmatrix}^2$; matrice $(n-1)\times(n-1)$ GRAM dei $v_1 \dots v_{n-1}$: $\begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_{n-1}^t \end{pmatrix}(v_1 \dots v_{n-1}) = A^t A$

esempio: (n=3) $\|v \times w\|^2 = \begin{vmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ v \cdot w & w \cdot w \end{vmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2 = \|v\|^2\|w\|^2(1 - \cos^2\theta)$

Pitagora!

area parallelogramma^2 = $\sum$ (aree proiezioni ortogonali sui piani coordinati)^2

dimostrazione della formula di Lagrange:

$u = \mathrm{cross}(v_1, \dots, v_{n-1})$

$\|u\|^2 = u \cdot u = u \cdot \mathrm{cross}(v_1, \dots, v_{n-1}) = |u \ v_1, \dots, v_{n-1}|$

$\|u\|^4 = |(u, v_1 \dots v_{n-1})|^2$; $|A|^2 = |A| \cdot |A| = |A^t||A| = |A^t A|$

$= \left| \begin{pmatrix} u^t \\ v_1^t \\ \vdots \\ v_{n-1}^t \end{pmatrix} (u \ v_1 \dots v_{n-1}) \right| = \begin{vmatrix} u \cdot u & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & v_i \cdot v_j \\ 0 & \end{vmatrix}$; $u \cdot u = u^t u$, $v_i \cdot v_j = v_i^t v_j$

$= \|u\|^2 \cdot |v_i \cdot v_j| \Rightarrow \|u\|^2 = |v_i \cdot v_j|$ //