$A \overset{\mathbb{R}}{\sim} B$ (risp. $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow \exists\, M \in \underset{\mathbb{R}}{GL}$: $MAM^{-1} = B$ $\quad (A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$

$A \overset{\mathbb{R}}{\nsim} B$ (risp. $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow \forall M \in \underset{\mathbb{R}}{GL}$: $MAM^{-1} \neq B$ (matrici "diverse")

Nota: $A \overset{\mathbb{R}}{\nsim} B \Rightarrow A \overset{\mathbb{C}}{\nsim} B$
$\underset{\mathbb{R}}{\Leftarrow}$
$A \overset{\mathbb{C}}{\sim} B \Rightarrow A \overset{\mathbb{R}}{\sim} B$

$A \overset{\mathbb{R}}{\sim} B$ $\Leftrightarrow \exists\, P \in \underset{\mathbb{R}}{O}$: $P^{-1}AP = B$ $\quad M_n(\mathbb{R})/\underset{\mathbb{R}}{\sim}$? $\rightsquigarrow$ Teoria dei valori singolari (anche $\mathbb{C}$ $\in GL$) e relativi spazi propri.

$A \overset{\mathbb{R}}{\sim} B$ $\Leftrightarrow \exists\, P \in \underset{\mathbb{R}}{O}$: $P^{-1}AP = B$ $\quad M_n(\mathbb{R})/\underset{\mathbb{R}}{\sim}$? $\rightsquigarrow$ difficile! Teorema spettrale (matrici ortogonalmente diagonali) ossia $P^{-1} = P^t$

Programma: ① Geometria hermitiana (in realtà su $\mathbb{C}$)
② Teo Spettrale (su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$)
③ Teoria dei valori singolari.

Geometria Hermitiana (cosa fare nuovo per classificazione con $\mathbb{C}$?)

Sia $V = V_n(\mathbb{C})$

non possiamo usare sesquilinearità di prodotto scalare causa su $V_n(\mathbb{C})$ perché restano "LEGATI SCALARI".
Per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ $\quad (i, i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \cdot i + i \cdot 0 = -1$
$\neq 0$

Allora vogliamo una definizione una proprietà tale che si preservi sul nuovo prodotto (anche nel caso del $V_n(\mathbb{R})$, e che valga anche su $V_n(\mathbb{R}) \subseteq V_n(\mathbb{C})$ da la proprietà bilineare rimane.

Def: Prodotto hermitiano su $V_n(\mathbb{C}) = V$:

$\varphi : V_n(\mathbb{C}) \times V_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$
$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle = \bar{v}^t w$

Proprietà:
- $\langle v, (w+z) \rangle = \bar{v}^t(w+z) =$
$= \bar{v}^t w + \bar{v}^t z = \langle v, w \rangle + \langle v, z \rangle$
$\langle v, \lambda w \rangle = \bar{v}^t(\lambda w) = \lambda \bar{v}^t w = \lambda \langle v, w \rangle$
$\langle \lambda v, w \rangle = \bar{\lambda} \bar{v}^t w = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$
Conclusione: è lineare in seconda e sesquilineare.
- positività: $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad$ perché $\langle v, v \rangle = \bar{v}^t v$
$= \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i v_i$
$= \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$
somma di $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ($|\mathbb{R}|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)
$\Rightarrow \langle v, v \rangle \geq 0$ $\quad \forall v \in V_n(\mathbb{C})$
$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

definizione $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\bar{v}^t v}$ $\quad \forall v \in V_n(\mathbb{C})$
norma su V
funzione $V_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
$v \longmapsto \|v\|$
$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ $\quad (\lambda \in \mathbb{C})$
$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Cauchy-Schwarz: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Angolo tra vettori complessi: } \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1}$

Conclusione: Cose simili a prima (stesse proprietà con le nuove norme).

Esercizio: $\langle v, w \rangle = \bar{v}^t w$
$\langle w, v \rangle = \bar{w}^t v$
$\overline{\langle w, v \rangle} = \overline{\bar{w}^t v} = \overline{\bar{w}^t v}^t$
$= v^t \bar{w}$
$= v^t w$
$= \langle v, w \rangle$

Quindi: $\|v + w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle$
$= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$
$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2$

$\Rightarrow$ $\|v + w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2$
$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$
$= (\|v\| + \|w\|)^2$
(Proprietà complessa)

Analogamente $\|v - w\| \geq \|v\| - \|w\|$
$\Rightarrow$ $\|v + w\| \geq \|v\| - \|w\|$

Nota: (coefficienti della equazione CARTESIANA di un sottospazio $\underset{\mathbb{C}}{\text{sono}}$ $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ non cambiano di un sottospazio)

$\sum a_i x_i = 0$ $\quad (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$
coniugo
$\Rightarrow$ $(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n)\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0$
vettore ortog.

Definizioni: Basi ortogonali: $v_1, \dots, v_n$: $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$
$\mathbb{C}^n \times_j$

basi ortonormali: $v_1, \dots, v_n$: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$
$\mathbb{C}^n \times_j$

La base canonica è basi. (non ci sono vettori non ortogonali)
In questo caso del $V_n(\mathbb{R})$ si può visionare (una base non ortogonale) $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$-$\mathbb{R}$

Se $v_1, \dots, v_n$ è b.n.o. e $\{v_1, \dots, w_n\} = \{w_1, \dots, w_n\} = H$ allora da vedere il ha da ortonormale possibile:
$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n$
perché $v_1, \dots, v_n$ è b.n.o.
$(\bar{v}_i^t v_j) = (\delta_{ij})$
$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \bar{v}_1^t \\ \vdots \\ \bar{v}_n^t \end{pmatrix}(v_1 \dots v_n) = (\delta_{ij})$
$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \bar{v}_1^t \\ \vdots \\ \bar{v}_n^t \end{pmatrix}(w_1 \dots w_n) = H$
$= P^t P = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}}_{\bar{P}^t}(w_1 \dots w_n) = \bar{P}^t P = A$

Sappiamo la relazione tra $V_n(\mathbb{R})$, $V_n(\mathbb{C})$, $V_n(\mathbb{H})$

per $\mathbb{R}^n$ $\quad$ per $\mathbb{C}^n$ $\quad$ per $\mathbb{H}^n$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$e_1, \dots, e_n$ $\quad$ $e_1, \dots, e_n, \dots, ie_n$ $\quad$ $e_1, \dots, e_n, \dots, ie_n, \dots, je_n, \dots, ke_n$
base in $\mathbb{R}$ $\quad$ base in $\mathbb{C}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{C}$

$M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} M_n(\mathbb{R})$

Teorema spettrale reale:

una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è MERIDIONALMENTE DIAGONALIZZABILE ($\exists\, P \in O_n(\mathbb{R})$: $P^{-1}AP$ diagonale)

se A è simmetrica ($A = A^t$)

Nota: $\Rightarrow$ ovvia: se $P^{-1}AP$ diagonale $= \Delta$
allora $A = PAP^{-1} = PAP^t$
dunque
$A^t = (PAP^t)^t = \bar{P}^t A^t P^t$
$= PAP^t = A$

Indice di una di quelle e allora
$\Leftarrow$ $A = A^t$ (simmetrica) allora
esiste una base ortonormale di AUTOVETTORI per A.

Definizione: $A \in M_n(\mathbb{C})$

Diciamo che A è:

HERMITIANA se $A = \bar{A}^t$
(se A fosse reale, diventerebbe!)

NORMALE se $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A$
(commuta con la coniugata traspostA!)

un particolare: se $A \in$ hermitiana, simmetrica reale, unitaria, ortogonale reale, diagonale, diagonalizzabile, allora è normale.

se $A = \bar{A}^t$
allora $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A$

Teorema spettrale complesso (hermitiani):

$A \in M_n(\mathbb{C})$
A è unitariamente diagonalizzabile ($\exists\, U \in U_n(\mathbb{C})$: $UAU = \Delta$ diagonale)
$U^{-1}AU$

se $A \in$ normale
(A commuta con $\bar{A}^t$).

Nota $\Rightarrow$ ovvia: se $U^{-1}AU = \Delta$
allora $A = U\Delta U^{-1}$
$\bar{A}^t = (U\Delta U^{-1})^t$
$= U\bar{\Delta}^t U^{-1}$
$= U\Delta U^{-1}$
$A\bar{A}^t = U\Delta U^{-1} U\bar{\Delta}^t U^{-1}$
$= U\Delta\bar{\Delta}U^{-1}$ $\quad$ $\bar{A}^t A = U\bar{\Delta}^t U^{-1} U\Delta U^{-1}$
$= U\bar{\Delta}\Delta U^{-1}$
$\Delta\bar{\Delta} = \bar{\Delta}\Delta$
Le due matrici di commutano tra loro!

$\Leftarrow$ non banale: se $A \in$ normale, esistono di autovalore che $\exists$ una base o.n. (ortonormale) di AUTOVETTORI di A.

Sviluppo per loro Gaussia $\mathbb{R}$:

(1) Tutti gli autovalori sono reali (sono in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ A)

(2) gli autospazi sono a due due ortogonali ?

(3) se $W \in$ sottospazio stabile per A allora $W^\perp \in$ stabile per A

(4) esiste una base di autovettori ortogonali in blocchi.
per induzione.
costruisco $v_1, \dots, v_n$ ricorsivamente $\overset{\text{(*)}}{\text{(**)}}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Supponiamo che sia vero per $n-1$ $\Rightarrow$ esiste v_1 autovettore di A (**)
dunque trovo un $W^\perp$ stabile per A (**)
ortogonale $\sim$ indipendenti, quindi indipendenti

(5) se $A = A^t$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda = A^t \lambda$ allora $\lambda \in \mathbb{R}$
$v \in \mathbb{C}^n$ $\quad$ (**) $\sim$

dimostri:

$\lambda v = Av$
$\bar{\lambda}\bar{v}^t = \bar{v}^t A$
$\bar{\lambda}\bar{v}^t v = \bar{v}^t A v$
$\bar{\lambda}\|v\|^2 = \lambda\|v\|^2$
$\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$
$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

6/11/24

Teorema spettrale:

(R) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile
($\exists\, P \in O_n(\mathbb{R})$: $P^{-1}AP$ diagonale)
($\exists$ una base ortonormale di autovettori per A)
se A simmetrica ($A = A^t$)

(**) ovvio: $\Leftarrow$

Dimostrazione: (1) autovalori sono $\mathbb{R}$
(2) autospazi distinti sono ortogonali
(3) W sottosp. stabile per $A \Rightarrow W^\perp$ anche
(4) conclusione: $\exists$ base ortonormale per A

(5) se $A = A^t$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
$v \in \mathbb{C}^n$
$\bar{v}^t A v = \bar{v}^t(Av) = \bar{v}^t \lambda v = \lambda \bar{v}^t v$
$\bar{v}^t A v = (\bar{A}\bar{v})^t v = (\bar{\lambda}\bar{v})^t v = \bar{\lambda}\bar{v}^t v$
$\Rightarrow \lambda \bar{v}^t v = \bar{\lambda}\bar{v}^t v \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$
$\|v\|^2 \neq 0$ $\quad \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(6) se $A \neq A^t$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda = A^t \lambda$ allora $\lambda \in \mathbb{R}$
$Av = \lambda v$
$v \in \mathbb{C}^n$
$\bar{\lambda}\bar{v}^t = \bar{v}^t A$
$\bar{\lambda}\bar{v}^t A v = \bar{v}^t A v = \lambda \bar{v}^t v$
$\bar{\lambda}\bar{v}^t A v = \bar{v}^t \lambda v$
$(\bar{\lambda} - \lambda)\bar{v}^t v = 0$ $\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$
$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

(7) se $W \in$ stabile per A allora $W^\perp \in$ stabile per A
W stabile per A $\Leftrightarrow$ $\forall w \in W$ $Aw \in W$
$W^\perp$ per $w' \in W^\perp$ allora $w' \cdot w = 0$ $\forall w \in W$
vogliamo che succede per Aw' ($\in W^\perp$)
$(Aw') \cdot w = (Aw)^t w = w^t A^t w$
$= w^t A w$
$= w^t \lambda w$
$= \lambda w^t w$
$= 0$
dunque $Aw' \in W^\perp$
$(A w \in W \Rightarrow A w' \in W^\perp)$

(8) Conclusione:
per quel sottospazio corpo non banale
vedo non per quella base $\in$ per $(\mathbb{C})$
abbiamo una base di $W \in V_n(\mathbb{R})$
spazio di autospazi
Sappiamo per induzione che W e $V_n(\mathbb{R})$
allora $W^\perp$ stabile per A
dunque $W^\perp \in$ stabile per A
$\Rightarrow$ $\exists$ autovettori in $W^\perp$ per A,
abbiamo fatto anche con tutti gli stati
(sottospazio di autospazi (sopra))

Teorema: $A \in \mathbb{C}$ è unitariamente diagonalizzabile
($\exists\, U \in U_n(\mathbb{C})$: $U^{-1}AU$ diagonale)
se A è normale
(A commuta con $\bar{A}^t$: $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A$)

(**) ovvio: $\Leftarrow$

(0) $\lambda v = Av$ $\quad$ $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow 0$ $\quad$: $V_n(\lambda) \cong V_n(\bar{\lambda})$
$(\lambda v, w) = \lambda v(\bar{A}^t - \bar{\lambda})$ autospazio $w \in V_n(\lambda) = V_n(\bar{\lambda})$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t A^t(\lambda v) = 0$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t A^t \lambda v = 0$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t A v = 0 \Leftrightarrow \bar{A}^t \lambda v = 0$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t v = 0$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t v = 0$
$\Leftrightarrow$ $\bar{A}^t