GEOMETRIA PROIETTIVA

Motivazione: in geometria affine abbiamo visto
proiezioni di rette $L \to P \cap L$
$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

(Proiezioni additive, preservano allineamento)

problema proiettivo: proiezione da un punto:

$\pi(x) = \lim_{y \to 0} \frac{x}{y}$

$C = \{y = 1\}$, $\pi : C \to \mathbb{R}$, $\pi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x}{y}$ funzione continua $\frac{x}{y} \to \frac{x_0}{y_0}$ con $y_0 \neq 0$

$\pi(S) = (\pi \circ \iota) \wedge (C \cap S)$ è punto $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in C$ e $y_0 \neq 0$

$\boxed{\text{dunque } \pi(S) = \begin{pmatrix} x_0/y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ con $x_0 = \frac{x_0}{y_0}$, $y_0 \neq 0$, $y_0 = 1$

$\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\} \to \{y=0\} \cong \mathbb{R}^1$

non è lineare (e' decentrato, e' bianco tutto, non è affine in tutti i punti)

2D problema duale del problema proiettivo affine:
se fissato da C ho fissato π posso
e definire lungo spazio per C e parallelo a L.

Supp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \cdot$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\pi(S) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (descrizione di tipo di $\pi(S)$)

Piano del 1/3/24 "dopodiso":
sistema lineare (omo non omogeneo)

$Ax = b$

$A = \boxed{}$

$x = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

se $\operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg} A$
soluzioni: $x_0 + \ker A_{n \times n}$

chiamo $\underset{\text{sist. omo}}{AX = 0} = \underset{\text{sist. completo}}{AX = b}$

sistema omogeneo

$AX = b \times$ x_0 soluzione

$(-A)\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$

soluzioni del sistema omogeneo?

$\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soluzione di $AX = bx$
cerco $\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è soluzione

$x_0 \to$ $\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
$x_1 \to$ $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è soluzione di $AX = bx$

$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ sol $AX = 0$

$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sol $AX = bx$

$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sol $AX = bx$

$\pi(S) = \begin{pmatrix} x_0/y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\langle \begin{pmatrix} x_0/y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$

se punto di sistema "omogeneizzato" è soluzione di problema di partenza "classico" (più semplicemente per di dimostrazione...).

Conclusione: il sistema omogeneizzato fornisce esatto sia delle soluzioni affini (affine) sia delle soluzioni affini (sistema omogeneo)
una cosa omogenea lettoriale di distinzione di un spazio con una metrica in un sol (dimensione n+1)
le soluzioni lettoriali vanno cercate "punto per punto"

$\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\pi(S) = \begin{pmatrix} x_0/y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\langle \begin{pmatrix} x_0/y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\underset{\text{sistema omogeneo}}{\ker(A|0)} \to \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{\text{sistema omogeneo}}{\ker(A|0)} \to \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Scopo: fissato uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ (o $\mathbb{A}^n$)
e, passando per l'origine (dimensione n+1)
potremo dare proiezione coordinate.

Definizione: se V è spazio vettoriale (o per esempio reale) di dimensione $n+1$:

SPAZIO PROIETTIVO ASSOCIATO ADDIRITTO A V:
$\mathbb{P}(V) := \{ W : W \in V \}$ tutti iperspazi di V

SPAZIO PROIETTIVO PUNTIFORME AD A V:
$\mathbb{P}(V) := \{ \langle v \rangle : \underset{v \neq 0}{v \in V} \} \subseteq \mathcal{P}(V)$
sottoinsieme di tutte le rette di V

Note: $\mathcal{P}(V)$ ha struttura di reticolo con
$\subset$ inclusione di sottospazi
$\cap$ $\cap$ intersezione di sottospazi
$\vee$ $+$ sommo di sottospazi (spazio generato da due U)

$\langle 0 \rangle$ insieme vuoto
V insieme tutto spazio
Non è distributivo $W \cap (U + V) \neq (W \cap U) + (W \cap V)$
$(W \cap U) + (W \cap V) = (W \cap U) + (W \cap V)$
$\neq (\text{rank} \leq 2)$

Lato (DIMENSIONE): insieme dei sottospazi proiettivi:
se $W \in \mathcal{P}(V)$, con $W \leq V$,
$\dim_{\mathbb{P}}(W) := \dim_{\mathbb{R}}(W) - 1$

dunque: $\dim_{\mathbb{P}}(\langle 0 \rangle) = 0 - 1 = -1$
$\mathcal{P}(0) = \langle 0 \rangle$ è vuoto proiettivo $\neq \emptyset$

$\dim_{\mathbb{P}}(\mathcal{P}) = 2 - 1 = 1$ punti proiettivi
$\dim_{\mathbb{P}}(\mathcal{P}(V)) = 2 - 1 = 1$ retta proiettiva
(indipendente)
$\langle 0 \rangle \subset \langle v \rangle$
sp dei punti $\neq$ dim RETTA

$\dim_{\mathbb{P}}(V) = (n+1) - 1 = n$

Lato (DIPENDENZA): insieme dei sottospazi proiettivi:
se $W \in \mathcal{P}(V)$, con $W \leq V$,
$\operatorname{dipend}_{\mathbb{P}}(W) := \operatorname{dipend}_{\mathbb{R}}(W) - 1$

dunque: $\operatorname{dipend}_{\mathbb{P}}(\langle 0 \rangle) = 0 - 1 = -1$
$\mathcal{P}(0) = \langle 0 \rangle$ è vuoto proiettivo $\neq \emptyset$

$\operatorname{dipend}_{\mathbb{P}}(\mathcal{P}) = 2 - 1 = 1$ PIANO PROIETTIVO
$\operatorname{dipend}_{\mathbb{P}}(\mathcal{P}(V)) = 2 - 1 = 1$ RETTA PROIETTIVA
(indipendente)
$\langle 0 \rangle \subset \langle v \rangle$
sp dei punti $\neq$ RETTA

$\operatorname{dipend}_{\mathbb{P}}(V) = (n+1) - 1 = n$

Lato (GRANDEZZA): insieme dei sottospazi proiettivi:
se $W \in \mathcal{P}(V)$, con $W \leq V$,
$\operatorname{grand}_{\mathbb{P}}(W) := \operatorname{grand}_{\mathbb{R}}(W) - 1$

dunque: $\operatorname{grand}_{\mathbb{P}}(\langle 0 \rangle) = 0 - 1 = -1$
$\mathcal{P}(0) = \langle 0 \rangle$ è vuoto proiettivo $\neq \emptyset$

$\operatorname{grand}_{\mathbb{P}}(\mathcal{P}) = 2 - 1 = 1$ PUNTI PROIETTIVI
$\operatorname{grand}_{\mathbb{P}}(\mathcal{P}(V)) = 2 - 1 = 1$ RETTA PROIETTIVA
(indipendente)
$\langle 0 \rangle \subset \langle v \rangle$
sp dei punti $\neq$ RETTA

$\operatorname{grand}_{\mathbb{P}}(V) = (n+1) - 1 = n$

Modelli dei spazi proiettivi standard:

$V = \mathbb{R}^{n+1} = V_{n+1}(\mathbb{R})$ spazio vettoriale standard dim $n+1$

$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ spazio proiettivo standard
$\left\{ \begin{array}{l} \langle 0 \rangle : \text{ sp } \mathbb{R}^{n+1} \\ \langle v \rangle : \text{ sp } \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right.$

$\mathcal{P}(V) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0, \text{ modulo } \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

$\underset{\text{sono } \sim \text{ se } w = \lambda v \text{ con } \lambda \neq 0}{\sim}$
$\Rightarrow \langle v \rangle = \langle w \rangle$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ punti di $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

$\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \cup \mathbb{A}^{n-1}(\mathbb{R}) \cup \dots \cup \mathbb{A}^0(\mathbb{R})$
per induzione

Esempi: $\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} / \sim = \{ \infty \}$ un punto!

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim$

$= \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
punto all'infinito, retta $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$

$= \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^1(\mathbb{R})$
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
punti all'infinito, retta $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$
$\mathcal{P}^1(\mathbb{R})$ è una retta proiettiva

$\mathcal{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$

ecc.

Caso reale: $\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2 \setminus 0) / \sim = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \{\infty\}$
proiezione stereografica da $\mathbb{S}^1$ a retta, a meno del punto $(0, 1)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$
da omeomorfismo

$\mathcal{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$
$\mathbb{A}^1 \cong \mathbb{R}$
$\infty \mapsto \pi(N)$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{A}^1 \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$

$\mathbb{S}^1 / \text{antipodale } \pi = \pi + \pi$
$\{\pm 1\}$
proiezioni sfera unità
$\mathbb{S}^1 / \text{antipodale dell'equatore}$
$\{\pm 1\}$
proiezioni sfera unità equatore!
proiezioni "concentrate" la semisfera inferiore (ogni punto $x^2 < 0$ viene mandato in quello simmetrico superiore), ma i punti equatoriali?
$\mathbb{S}^1 / \text{antipodale del bordo}$
$\{\pm 1\}$
proiezioni sfera unità bordo
Quindi proiezione da $\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{S}^1$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$
$\mathbb{S}^1 / \text{antipodale}$
$\mathbb{S}^1 / \text{antipodale del bordo}$

Nota

Quindi per fatto di Riemann che spazio non orientabile, non posso più fare la sfera unità!

11/03/2024

Riassunto: V spazio vettoriale $(\dim_{\mathbb{R}} V = n+1)$ su $\mathbb{R}$,
definiamo: $\mathcal{P}(V) = \{ W \in V \}$ TUTTI i SOTTOSPAZI
SUL PROIETTIVO CORRISPONDENTE
$\cup$
$\mathcal{P}(V) = \{ \langle v \rangle : \underset{v \neq 0}{v \in V} \}$ SOTTOINSIEME DI TUTTE SE PROIETTIVO PUNTIFORME.

$\leftarrow$ sottoinsieme di reticolato per V
$\leftarrow$ $\langle v \rangle$ non appartenente al reticolato per V

Struttura di reticolato: $\subset, \wedge, \vee, \langle 0 \rangle = \emptyset_{\mathcal{P}}, V = \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}_{\mathcal{P}}$
$\dim_{\mathcal{P}}(V) := \dim_{\mathbb{R}}(V) - 1$ $\dim \emptyset_{\mathcal{P}} = -1$
$\dim \langle v \rangle = 1$ retta
$\langle 0 \rangle = \emptyset$

Nota: siccome "Zero" Proiettivo è un sottoinsieme di più spazi vettoriali ci sono tante "rigidità", punti = sp vett dim 1.

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^n, \text{ non tutti } 0 \right\}$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$ dimensione reale $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$

Piano di Fano

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$
dimensioni reale $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$

$(\mathbb{R}^1 \setminus 0) / \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}/\sim$ $\mathbb{A}^1 = \mathbb{R}^1 \setminus 0$
$\lambda \sim \mu \iff \lambda = \mu$ oppure $\lambda = -\mu$
$\mathbb{R}^1 / \text{antipodale}$ $\mathcal{P}^0(\mathbb{R}^1) = \{\pm 1\}$
punti opposti = coppia antipodale di punti su $\mathbb{S}^0$

$\mathbb{S}^0 / \text{antipodale dopo aver preso } \mathbb{R}^\times$

punti $\mathbb{S}^0$ non sono $\mathbb{R}^1 / \text{antipodale del bordo}$

$\mathbb{B}^1 = \{ x \in \mathbb{R}^1 \mid |x| \leq 1 \}$
$\mathring{\mathbb{B}}^1 = \{ y \in \mathbb{R}^1 : |x| < 1 \}$

$n = 1$ $\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
$= \mathbb{S}^1/\sim$
$= \mathbb{B}^1/\text{antipodale bordo}$
$= \mathbb{S}^1$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^\times$
$= \mathbb{S}^1/\sim$
$= \mathbb{B}^1/\text{antipodale bordo} = \mathbb{S}^1$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{S}^1$
se $w = v\lambda$
$\lambda = e^{i\theta}$ $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$
SFERA DI RIEMANN.

$\{\text{spazi antipodali } (-v)\}$
$\mathbb{S}^1/\mathbb{C}$
$\mathcal{P}^1(\mathbb{C}) \neq \mathbb{S}^1$
$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \\ \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{S}^1 \end{array}}$

$\mathcal{P}^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^2 \setminus 0)/\mathbb{C}^\times$ $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$
$= \mathbb{S}^3/\mathbb{C}^\times$ $\mathbb{S}^3 = \{ x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1 \}$
$\mathbb{C}^\times \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = 1$
$\Rightarrow$ $\mathbb{S}^3 / \mathbb{C}^\times$
$|\lambda| = 1$ $\lambda \in \mathbb{S}^1$

$\boxed{\text{punti } \mathbb{C} \text{ di } \mathbb{S}^3 = \text{cerchi } \mathbb{S}^1}$

$\mathbb{S}^2 \to \mathcal{P}^1(\mathbb{C})$
$\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

(in generale $\mathcal{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1$)

Nota: sostituire che AFFINE e PROIETTIVO
ha SOTTOINSIEMI:

$\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \cup \mathcal{P}^{n-1}(\mathbb{R})$

sottospazi affini
retta $\longrightarrow$ retta $\cup$ $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$
$\mathbb{A}$ affine $\cup$ punto
piano $\longrightarrow$ piano $\cup$ $\{\mathbb{A}^1(\mathbb{R}) \text{ affine}\}$
affine bordo

sottospazi proiettivi
$\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ $\cup$ $\mathcal{P}^0(\mathbb{R})$

$W \cap \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longleftarrow W$
$W \cap \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \longleftarrow W \cap \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

$\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

proiezione affine $\Rightarrow$ spazi proiettivi con $\cap$ non vuoto $\neq \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

Spazio proiettivo duale:

V sp vettoriale dim $n+1$ $\quad \mathcal{P}(V)$
V^* sp duale dim $n+1$ $\longrightarrow \mathcal{P}(V^*) = \mathcal{P}^*(V)$
TUTTI PIANI DI $\mathcal{P}(V)$

tra $\mathcal{P}(V) \subseteq \mathcal{P}^*(V)$ definiamo
$W \longmapsto W^\perp = \{ \varphi \in V^* : \varphi(W) = 0 \}$
$\log \geq 2W$

e un isomorfismo di reticolati:
$0^\perp = V^*$
$V^\perp = 0$
$(W \cap U)^\perp = W^\perp \wedge U^\perp$
$(W \vee U)^\perp = W^\perp \wedge U^\perp$
$W \subseteq U \iff U^\perp \geq W^\perp$

e $\dim_{\mathbb{P}} W + \dim_{\mathbb{P}} W^\perp = n+1$
$\dim_{\mathbb{P}} V^* = n$

$\boxed{\dim_{\mathbb{P}}(W^\perp) = n - \dim_{\mathbb{P}}(W) - 1}$

perché: $\dim_{\mathbb{P}} W + \dim_{\mathbb{P}} W^\perp = \dim_{\mathbb{P}} V = n+1$
$(n+1) + (1^\circ \text{ sp}) = n \text{ sp}$

dunque $\dim = n - 1 - 1$
punti: $\dim 0 \longrightarrow \dim n-0-1 = n-1$
iperpiani
rette: $\dim 1 \longrightarrow \dim n-1-1 = n-2$
iperpiani: $n-1 \longrightarrow \dim n-(n-1)-1 = 0$
punto

Esempi nel piano: $n = 2$

dualità dei punti duale
$\dim 0$ rette
$\dim 2-0-1 = 2$
duale di rette duale
$\dim 1$ punti
$\dim 3-1-1 = 1$
duale dei piani
$\dim 3$ punti
$\dim 3-3-1 = 0$

"per 2 punti distinti passa una retta" $\longleftrightarrow$ "per 2 piani distinti passa una retta"

Pag. 2 punti distinti
una retta

Pag. 2 piani distinti
una retta

"per $\mathbb{R}^2$ duale dei "per 2 punti c'è una retta" duale"
"due piani distinti si intersecano in una retta" duale

3 punti allineati un piano $\longleftrightarrow$ 3 piani che si intersecano in una sola retta

Problema: un $\mathbb{R}^2$ piano dato da 3 rette tali che a 2 a 2 si intersecano
allora (e solo allora)
$\exists$ piano tale per la stessa punto
oppure stesso tutte di $\mathbb{R}^2$ stesso punto
(o coincidono)

Esempi nello spazio $n = 3$:

duale dei punti $\longrightarrow$ piano
$\dim 0$
$\dim 3-0-1 = 2$
duale di rette $\longrightarrow$ rette
$\dim 1$
$\dim 3-1-1 = 1$
duale dei piani $\longrightarrow$ punti

"per 2 punti distinti passa una retta" $\longleftrightarrow$ "per 2 piani distinti passa una retta"

Pag. 2 punti distinti
una $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^3$

Pag. 2 piani distinti
una $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^3$

"per $\mathbb{R}^3$ duale dei "per 2 punti c'è un piano" duale"
"due piani distinti si intersecano in una retta" duale

"$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ è piano" duale: "$\mathbb{R}^3 \setminus 0 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ è punto" "stesso duale"

"$\mathbb{R}^3$ incidenti $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^3$ complanari" "$\mathbb{R}^3$ complanari $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^3$ incidenti"

Riassunto:
$\exists$ duale rette stesso intersezione ($\cap$ punto proiettivo) che passano tutte lo spazio ($\vee$ piano $\mathbb{R}^3$)
$\exists$ dualità non orientabile tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$

Problema: $\exists$ $\mathbb{R}^3$ piano dato da 3 rette tali che a 2 a 2 si intersecano
allora (e solo allora)
$\exists$ $\mathbb{R}^3$ tale per la stessa punto
oppure stesso tutte di $\mathbb{R}^3$ stesso punto
(o coincidono)

Capire se $\mathbb{R}^3$ unici $\Rightarrow$ rette $\mathbb{R}^3$ con stesso intersezione
e dualismo.

14/03/2024