G1-234-pppA

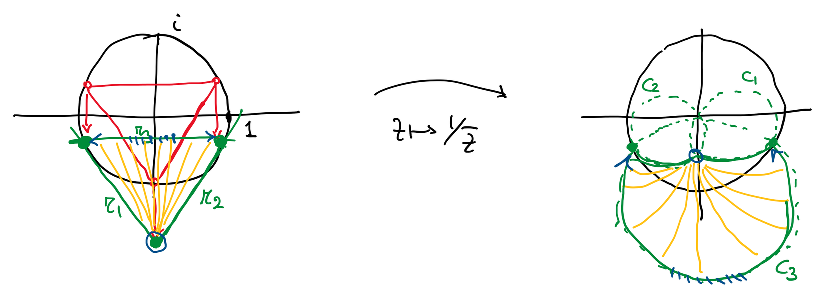
lunedì 20 novembre 2023 11:46

① $(z+i)^3 - i = 0$

$z+i$ = radici cubiche di $i = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\right)} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \\ e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \\ e^{i\frac{9}{6}\pi} = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \end{cases}$ $k=0,1,2$

$(i = e^{i\frac{\pi}{2}})$

$z = -i + (\text{radici cubiche di } i) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ -2i \end{cases}$



rette:

r_3: $y = -\frac{1}{2}$

$\frac{z-\bar{z}}{2i} = -\frac{1}{2}$

$z - \bar{z} + i = 0$

$iz - i\bar{z} - 1 = 0$

r_2: $y = \sqrt{3}x - 2$

$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z+\bar{z}}{2}\sqrt{3} - 2$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\bar{z} - 2 = 0$

r_3: riflessa di r_2 rispetto a y: $(x,y) \mapsto (-x,y)$, $z \mapsto -\bar{z}$

$y = -\sqrt{3}x - 2$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\bar{z} + 2 = 0$

circonferenze: $(z \mapsto 1/z)$

c_3: $iz - i\bar{z} - z\bar{z} = 0$

$(z+i)(\bar{z}-i) = 1$

$|z+i|^2 = 1$ centro $-i$, raggio 1

c_2: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\bar{z} - 2z\bar{z} = 0$

$\left|z - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2 = \frac{1}{4}$ centro $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$, raggio $\frac{1}{2}$

c_3: riflesso c_2

centro $\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$, raggio $1/2$.

---

② $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}, \alpha,\beta \in \mathbb{K} \right\}$: $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_5 \end{cases}$ sist: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

indipendenti, base, dim $U = 2$ — 3 equazioni cartesiane indipendenti ($=5-2$)

V: $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ sist. omog: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ soluzioni: $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_5 = \alpha+\gamma \\ x_2 = x_3 + x_4 - x_5 = \alpha+\beta-\gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$

2 equazioni indipendenti, dim $V = 5 - \#\text{equazioni} = 3$

$\begin{pmatrix}\alpha+\gamma\\\alpha+\beta-\gamma\\\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{3 vettori indip: base di } V}$

$U \cap V$ risolve il sistema di matrice

$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&1&0&-1 \\ 1&0&-1&0&-1 \\ 0&1&-1&-1&1 \end{pmatrix} \underset{\substack{IV-I \\ V-II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&1&0&-1 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} x_1 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix}$

rango 4, soluzioni dim 1

$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix}0\\\alpha\\0\\\alpha\\0\end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

dunque dim $(U+V)$ = dim U + dim V − dim $(U \cap V)$ $= 2+3-1 = 4$

$U+V$ è iperpiano (dim 4, una equaz. cartesiana)

base: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underset{III-I-II}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{IV-I+II}{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}$

dunque $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha-\delta \\ x_4 = \beta-\gamma+\delta \\ x_5 = \alpha-\gamma \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = x_1 \\ \beta = x_2 \\ \delta = \alpha - x_3 = x_1 - x_3 \\ \gamma = \alpha - x_5 = x_1 - x_5 \end{cases}$ $\Rightarrow x_4 = \beta - \gamma + \delta = x_2 - (x_1 - x_5) + (x_1 - x_3)$

$\Rightarrow x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$

sistema $(0\ 1\ -1\ -1\ 1)$

(è proprio equazione comune ai sistemi di U e di V...).

(b) se H iperpiano (dim $= 5-1 = 4$)

e $U+V$ ha dimensione 4,

allora dim $(H \cap (U+V))$ può essere $\begin{cases} 4 & \text{se } U+V \leq H \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$

quindi È SEMPRE $\neq U$ (perché dim $U = 2$),

ma può essere $= V$: sono tutti e soli gli iperpiani che

- contengono V
- non contengono $U+V$ (cioè diversi da $U+V$)

quindi gli iperpiani di equazioni

$\alpha(x_1 - x_3 - x_5) + \beta(x_2 - x_3 - x_4 + x_5) = 0$ con $\alpha \neq 0$

(per $\alpha = 0$ abbiamo $U+V$).

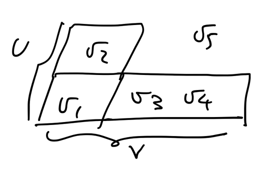
ovvero,

se abbiamo:

$U \cap V = \langle v_1 \rangle$

$U = \langle v_1, v_2 \rangle$

$V = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$



con v_1, v_2, v_3, v_4 lin. indip, e v_5 vettore per completare a base di $\mathbb{K}^5$:

sono gli iperpiani H generati da $\underbrace{v_1, v_3, v_4}_{\text{per contenere } V}$, $\underbrace{v_5 + \alpha v_2}_{\text{con } \alpha \in \mathbb{K} \text{ qualsiasi}}$

(c) U' complementare di U $\Rightarrow$ dim $U' = 5 - \dim U = 3$

V' complementare di V $\Rightarrow$ dim $V' = 5 - \dim V = 2$

la dimensione di $U' \cap V'$ si può calcolare usando Grassmann:

dim $U' \cap V'$ = dim U' + dim V' − dim $(U'+V')$

$= 2 + 3 - \dim(U'+V')$

$= 5 - \dim(U'+V')$

e ovviamente dim$(U'+V')$ è al massimo 5 (perché contenuto in $\mathbb{K}^5$)

al minimo 3 (perché contiene U')

quindi dim $U' \cap V'$ può essere $\begin{cases} 5-5 = 0 \\ 5-4 = 1 \\ 5-3 = 2 \end{cases}$

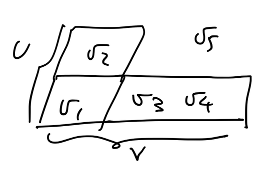
vediamo che sono tutti casi possibili:

per semplicità scriviamo

$U \cap V = \langle v_1 \rangle$

$U = \langle v_1, v_2 \rangle$

$V = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$



con v_1, v_2, v_3, v_4 lin. indip, e sia v_5 vettore per completare a base di $\mathbb{K}^5$.

possiamo usare $U' = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$, $V' = \langle v_2, v_5 \rangle$ e allora dim$(\underset{\langle v_5 \rangle}{U' \cap V'}) = 1$

oppure $U' = \langle v_3, v_4, v_1 + v_5 \rangle$, $V' = \langle v_2, v_5 \rangle$ e allora dim$(U' \cap V') = 0$

oppure $U' = \langle v_2 + v_3, v_1 + v_5, v_4 \rangle$, $V' = \langle v_2 + v_3, v_1 + v_5 \rangle$ e allora dim$(U' \cap V') = 2$

Si può anche vedere usando esplicitamente le basi date:

$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{U}$, $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{V}$

e cercando complementari usando la base canonica di $\mathbb{K}^5$:

① $U' = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $V' = \langle e_1, e_2 \rangle$ allora $U' \cap V' = U'$

② $U' = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $V' = \langle e_1, e_5 \rangle$ allora $U' \cap V' = \langle e_1 \rangle$

③ $U' = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $V' = \langle e_4, e_5 \rangle$ allora $U' \cap V' = \langle 0 \rangle$

Nota per capire come fare esempi:

$U = \langle v_1, v_2 \rangle$

UN complementare di U è dato da $\langle v_3, v_4, v_5 \rangle$

e per trovare TUTTI i complementari di U basta usare le classi laterali di v_3, v_4, v_5 in $\mathbb{K}^5/U$, cioè

$\langle v_3 + \alpha v_1 + \beta v_2, v_4 + \alpha' v_1 + \beta' v_2, v_5 + \alpha'' v_1 + \beta'' v_2 \rangle$

perché comunque questi vettori con v_1, v_2 generano tutto $\mathbb{K}^5$ (riduzione Gauss).

Idem per $V = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$ ...

---

③ $\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha^2-\alpha+1 & 2\alpha \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{I/III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha^2-\alpha+1 & 2\alpha \end{array}\right)$

$\underset{II-\alpha I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha^2-\alpha+1 & 2\alpha \end{array}\right)$

$\underset{III-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \end{array}\right)$

Quindi:

per $\alpha \neq 0, \neq 1$: rango 3 incompleta, quindi rango 3 completa, soluzioni di dim 1:

$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{2\alpha(\alpha-1)+\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{2\alpha+1}{\alpha} \\ x_2 = \frac{1}{\alpha}(\alpha - \alpha x_3 - x_4) = 1 - \lambda - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{\alpha(\alpha-1)-1}{\alpha(\alpha-1)} - \lambda \\ x_3 = \lambda \quad \text{(qualsiasi parametro)} \\ x_4 = \frac{1}{\alpha-1} \end{cases}$

$S(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2\alpha+1}{\alpha} \\ \frac{\alpha^2-\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)} - \lambda \\ \lambda \\ 1/\alpha-1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix} 2\alpha+1/\alpha \\ \frac{\alpha^2-\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)} \\ 0 \\ 1/\alpha-1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

per $\alpha \neq 0$, $\alpha = 1$: la matrice diventa

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

dunque rg completa $= 3$

rg incompleta $= 2$

e per R-C non ci sono soluzioni.

per $\alpha = 0$: la matrice diventa:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

dunque rg completa $= 2 =$ rg incompleta, otteniamo soluzioni di dim 2:

$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + \lambda + \mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \quad \text{(parametri qualsiasi)} \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$S(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\lambda+\mu \\ \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

determinare $S(\alpha) \cap S(\beta)$ significa trovare i valori delle incognite x_i che soddisfano entrambi i sistemi (con α e con β), cioè il sistema di matrice

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta & \beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2-\beta & \beta \end{array}\right)$ ← inutile (IV−I=0)

Quindi: se $\alpha = \beta$ otteniamo: $S(\alpha) \cap S(\beta) = S(\alpha)$ come di prima!

se $\alpha = 1$ oppure $\beta = 1$ abbiamo: $S(\alpha) \cap S(\beta) = \emptyset$ (uno dei due è $\emptyset$)

se $\alpha \neq \beta$ entrambi $\neq 1$:

se $\alpha = 0$ (oppure $\beta = 0$, per simmetria) il sistema è

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2-\beta & \beta \end{array}\right) \underset{IV-*II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$ ← impossibile

con $\beta \neq 0, 1$

Se $\alpha \neq \beta$ diversi sia da 0 che da 1 il sistema è

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2-\beta & \beta \end{array}\right) \underset{\substack{IV-\frac{\beta}{\alpha}II \\ V-\frac{\beta^2-\beta}{\alpha^2-\alpha}III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\beta}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - \frac{\beta^2-\beta}{\alpha^2-\alpha}\alpha \end{array}\right)$ impossibile

Riassunto:

$\beta \backslash \alpha$	$=0$	$=1$	$\neq 0,1$
$=0$	$S(0)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$=1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\neq 0,1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$S(\alpha)$ se $\alpha=\beta$; $\emptyset$ altrim.