① $\pi: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$ $\quad v \quad w$

$s: \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \rangle$

$d(\pi,s) = \dfrac{\mathrm{vol}_3(R-S, v, w)}{\mathrm{vol}_2(v,w)} = \dfrac{|\det(R-S, v, w)|}{\|v \times w\|}$

$= \dfrac{1\left|\det\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\cos\vartheta(r,s) = \cos\vartheta(v,w) = \dfrac{|v\cdot w|}{\|v\|\cdot\|w\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

vette sferiche (dist >0, ang $\neq 0, \pi$)

punti di minima distanza:

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\mu\\-1+\mu\\1\end{pmatrix}$

tali che $\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1+\lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+\mu\\-1+\mu\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\lambda-1-\mu\\2-\mu\\\lambda\end{pmatrix}$

da cui $\begin{cases}2\lambda-1-\mu=0\\ \lambda+1-2\mu=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\lambda=1\\ \mu=1\end{cases}$

dunque $R_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad S_0 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

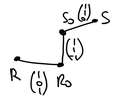
$d(R_0,S_0) = \|R_0 - S_0\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$

tetraedo: $R \quad S \quad R_0 \quad S_0$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathrm{vol}_3(\Delta(R,S,R_0,S_0)) = \frac{1}{6}\left|\det(R-S, S-S_0, R_0-S)\right|$

$= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right| = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$



$\mathrm{vol}_2(R,R_0,S_0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}$

$\mathrm{vol}_2(S,R_0,S_0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}$ — idem?

$2\,\mathrm{vol}_2(R,R_0S) = \|(R-R_0)\times(S-R)\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\| = 3$

$2\,\mathrm{vol}_2(RS_0,S) = \|(R-S)\times(S-S_0)\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\| = 3$

oppure: $\sqrt{\underset{(R-S,\,S-S_0)}{\|w\wedge w\|}} = \sqrt{\begin{vmatrix}5&1\\1&2\end{vmatrix}} = \sqrt{9} = 3$

rett. su R_0: $\frac{1}{2}\|R-R_0\|\cdot\|S-R_0\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}$

oppure $\frac{1}{2}\|(R-S)\times(R_0-S)\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

oppure $\frac{1}{2}\sqrt{\underset{(R-S,\,R_0-S)}{\|w\wedge w\|}} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}5&3\\3&3\end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

Le isometrie F che fissano puntualmente π mandano R_0 su R_0 e S_0 su un punto $F(S_0)$ che deve stare sul piano $\perp \pi$ per R_0 a distanza $\sqrt{3}$ da R_0, e il vettore direttore w di s su $\varphi(w)$ che si ottiene così:

$\varphi(w)$ deve essere ortogonale a $F(S_0)-R_0$

$\varphi(w)$ deve formare con il direttore di π un angolo uguale a quello tra π ed s.

Con i dati a disposizione: $\pi = R_0 + \langle v\rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$

$s = S_0 + \langle w\rangle = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\rangle$

possibili: $F(S_0)$ sono punti nel piano $R_0 + \langle v\rangle^\perp = R_0 + \langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$

$\ni \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\beta\\2+\alpha\\2-\beta\end{pmatrix}$

con $d(R_0, F(S_0)) = d(R_0,S_0) = \sqrt{3}$

cioè $\alpha^2 + 2\beta^2 = 3$, dunque $F(S_0) = \begin{pmatrix}1+\beta\\1\pm\sqrt{3-2\beta^2}\\2-\beta\end{pmatrix}$ con β t.c $3-2\beta^2 \geq 0$ ($\beta^2 \leq \frac{3}{2}$)

e possibili $\varphi(w)$ sono vettori $\perp F(S_0)-R_0 = \begin{pmatrix}\beta\\\pm\sqrt{3-2\beta^2}\\-\beta\end{pmatrix}$

e tali che $\cos(\varphi(w), v) = \frac{1}{2}$:

dunque $\varphi(w) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \langle\begin{pmatrix}\beta\\\pm\sqrt{3-2\beta^2}\\-\beta\end{pmatrix}\rangle^\perp = \langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\beta\\\pm\sqrt{3-2\beta^2}\\-\beta\end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix}\mp\sqrt{3-2\beta^2}\\2\beta\\\pm\sqrt{3-2\beta^2}\end{pmatrix}\rangle$

cioè $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\mp\sqrt{3-2\beta^2}\\2\beta\\\pm\sqrt{3-2\beta^2}\end{pmatrix}$ con $\begin{cases}\lambda = \frac{1}{2}/\sqrt{2}\\ \mu = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}/\sqrt{6}\end{cases}$ (cos, sin)

($\|-\| = \sqrt{2}$, $\|-\| = \sqrt{6}$)

(per formare angolo giusto con v).

② $U = \langle e_1, e_2\rangle$ $\quad W = \langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}\rangle$ $\quad w_1 \quad w_2$

$U^\perp = \langle e_3, e_4\rangle$

$w_1 \cdot w_2 = 0$ dunque $w_1 \perp w_2$

$\pi^1_U(w_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\pi^1_U(w_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \cos\vartheta(\pi^1_U(w_1), \pi^1_U(w_2)) = \dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$

$\pi^1_{U^\perp}(w_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\pi^1_U(w_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ ortog.

Siccome $\|w_1\| = \|w_2\|$,

le basi ortogonali di W (a meno della $\|-\|$)

si ottengono per rotazione: $cw_1 + sw_2$, $-sw_1 + cw_2$

con $c = \cos\vartheta$, $s = \sin\vartheta$.

le proiezioni ortogonali su U sono

$\begin{pmatrix}c+2s\\2c+s\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-s+2c\\-2s+c\\0\\0\end{pmatrix}$

e sono ortogonali sse $(c+2s)(-s+2c) + (2c+s)(-2s+c) = 0$

$3sc + 2c^2 - 2s^2 - 3sc + 2c^2 - 2s^2 = 0$

$c^2 = s^2$.

Usando $c=s\neq 1$ $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\\1\end{pmatrix}$ otteniamo basi di W

tali che le proiezioni ortogonali

su U: $\begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$

su $U^\perp$: $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\3\end{pmatrix}$.

NOTA: il risultato qui è quasi ovvio, avendo w_1, w_2 stesse norme, e i proiettati anche: $w_1 \pm w_2$ sono i bisettori ($\Rightarrow \perp$), e anche i proiettati! Ma è un caso particolare...

In generale: $W \cap U = 0$

$W \cap U^\perp = 0$

possiamo sempre che w_1, w_2 sia base ortonormale per W,

e cerchiamo una base $cw_1 + sw_2$, $-sw_1 + cw_2$ ($s = \sin\vartheta$, $c = \cos\vartheta$)

tale che le proiezioni siano basi ortogonali per $U, U^\perp$:

scritto $w_1 = u_1 + u_1'$ con $u_1 \in U$

$w_2 = u_2 + u_2'$ $\quad u_1' \in U^\perp$

(perché $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$)

e $0 = w_1 \cdot w_2 = (u_1 + u_1')\cdot(u_2 + u_2') = u_1\cdot u_2 + u_1'\cdot u_2'$

da cui $u_1 \perp u_2$ se $u_1' \perp u_2'$

(basta trovare le proiezioni ortogonali su U che siano ortogonali tra loro!) cioè: basta una condizione, e abbiamo una incognita (ϑ)

Infatti le proiezioni ortogonali su U di $cw_1 + sw_2$, $-sw_1 + cw_2$ sono

$cu_1 + su_2$, $-su_1 + cu_2$

e l'ortogonalità dà la condizione

$(cu_1 + su_2)\cdot(-su_1 + cu_2) = 0$

$c^2 u_1\cdot u_2 + sc(-u_1\cdot u_1 + u_2\cdot u_2) - s^2 u_1\cdot u_2 = 0$ — prima non c'era questo termine...

equazione in $t\vartheta$ con discriminante

$\Delta = (-u_1\cdot u_1 + u_1\cdot u_2)^2 + 4(u_1\cdot u_1)^2 \geq 0$

che dunque ha soluzioni reali.

Quindi possiamo realizzare questa situazione:

$W = \langle w_1, w_2\rangle$ con $w_1 \perp w_2$

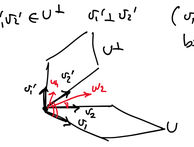
$w_1 = v_1 + v_1'$ con $v_1, v_2 \in U$ $\quad v_1 \perp v_2$

$w_2 = v_2 + v_2'$ $\quad v_1', v_2' \in U^\perp$ $\quad v_1' \perp v_2'$ (v_1, v_2, v_1', v_2' base ortogonale $\mathbb{R}^4$)

e restano 2 angoli da considerare:

$w_1 \perp v_2$: $\vartheta(w_1, v_1) \neq 0, \pi/2$

$w_2 \perp v_1$: $\vartheta(w_2, v_2) \neq 0, \pi/2$



Questi sono necessari e sufficienti per determinare la posizione di W rispetto a U A meno di ISOMETRIE (spiegare...)

Per ridurci ai casi particolari in cui W fosse $U, U^\perp$, bisognerebbe ruotare U e/o $U^\perp$ a seconda di certi valori degli angoli.

Per due piani π, σ in $\mathbb{E}^5(\mathbb{R})$ la posizione reciproca è quindi determinata da: $d(\pi,\sigma)$ (distanza) e i due angoli che determinano la posizione di V_π, V_σ.

③ $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$: π, s, t rette, $\pi \vee s \vee t = \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$

• $\dim(\pi \vee s) = 3$ altrimenti $\dim(\pi \vee s \vee t) < 3+1-(-1) = 5$ ($\pi \vee s$) (t)

per lo stesso motivo

$\dim(\pi \vee t) = 3$

$\dim(s \vee t) = 3$

e le tre rette sono 2 a 2 sghembe

ora $\dim((\pi \vee s) \wedge (\pi \vee t)) = \dim(\pi \vee s) + \dim(\pi \vee t) - \dim(\underset{\text{tutto}}{\pi \vee s \vee t}) = 3+3-5 = 1$

(perché $\wedge$ di spazi incidenti $\geq \pi$)

quindi $(\pi \vee s) \wedge (\pi \vee t) = \pi$ perché $\geq \pi$ ha dimensione 1.

idem per $(\pi \vee s) \wedge (s \vee t) = s$

$(\pi \vee t) \wedge (s \vee t) = t$.

•• Se $P \notin \pi \vee s$, $\pi \vee t$, $s \vee t$ allora $\dim(P_V(\pi \vee s)) = 0 + 3 - (-1) = 4$ (P sghembo con $\pi \vee s$)

$\dim(P_V(\pi \vee t)) = 4$

$\dim(P_V(s \vee t)) = 4$

chiamiamo $\alpha = P_V \pi \vee s$

$\beta = P_V \pi \vee t$

$\gamma = P_V s \vee t$

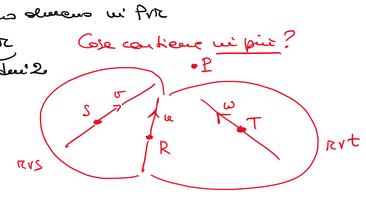
allora $\dim(\alpha \wedge \beta) \underset{\text{si uniscono almeno in } P_V\pi}{\geq} \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \vee \beta) = 4+4-5 = 3$

quindi $\underbrace{\alpha \wedge \beta}_{\dim 3} \not\geq \underbrace{P_V\pi}_{\dim 2}$

e $\dim(\alpha \wedge \gamma) = 3$

$\dim(\beta \wedge \gamma) = 3$

Cosa contiene un piano?



$\alpha = P_V \pi \vee s = P + \langle u, v, R-P, S-P\rangle$

$\beta = P_V \pi \vee t = P + \langle u, w, R-P, T-P\rangle$

e $u, v, w, S-P, T-P$ sono base di $\mathbb{R}^5$

($u, v, w, S-R, T-R$ base $\mathbb{R}^5$ perché $\pi \vee t \vee s = \mathbb{E}^5(\mathbb{R})$)

ora $R - P = au + bv + cw + d(S-P) + e(T-P)$

da cui $\underbrace{(R-P) - au}_{\in \text{spazio direttore di } \alpha\wedge\beta} = \underbrace{bv + d(S-P)}_{\in \text{spazio direttore di } \alpha} + \underbrace{cw + e(T-P)}_{\in \text{spazio direttore di } \beta}$ $\Rightarrow$ ideem

ideem $\Leftarrow$ esercizio: α, β si intersecano su rette $\Leftrightarrow V_\alpha \cap V_\beta$ sono indipendenti.

quindi otteniamo

$\alpha \wedge \beta = P + \langle u, bv + d(S-P), cw + e(T-P)\rangle$

si incontrano almeno in P

$\dim(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) = \dim(\alpha \wedge \beta) + \dim(\gamma) - \dim((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma)$

$= 3 + 4 - 5$ — $\dim 3$, $\dim 4$ = piano, $\alpha\wedge\beta \not\leq \gamma$, altrimenti $\pi, s, t \leq \gamma$ (quindi $\dim \leq 3$)

$= 2$ piano.

Questo piano ha le seguenti proprietà:

- passa per P,
- è v con π ha dimensione 3 (e non 4), quindi è "complanare con R",
- complanare con s
- complanare con t

ed è caratterizzato da queste proprietà.