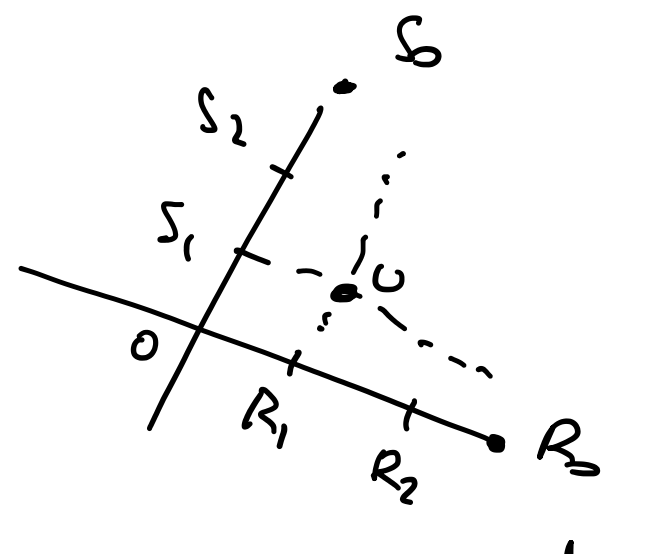


① Usiamo un riferimento con
 $O = \pi S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $R_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Usiamo come punto unità $(R_1 \vee S_1) \wedge (S_1 \vee R_2)$

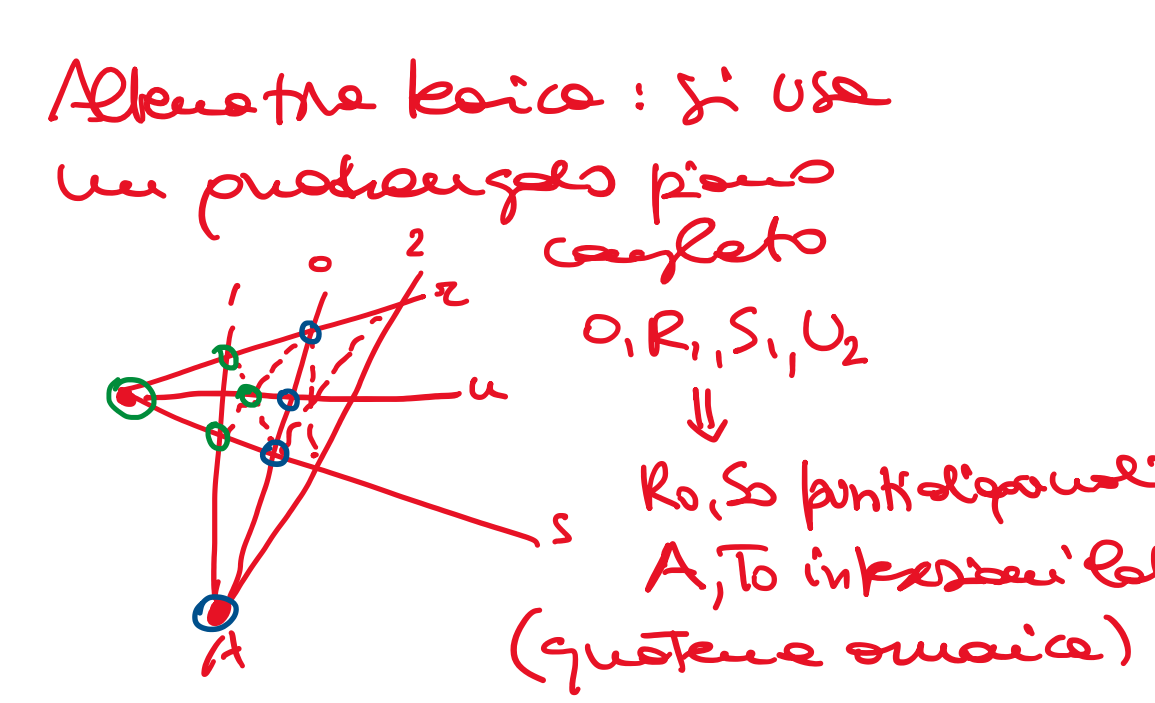
$R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$R_0 S_0 = (100)$
 $R_1 \vee S_1 = (-1 \ 1)$
 $R_2 \vee S_2 = (x \ y \ -x)$

allora abbiamo:
 $U_0: \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x-y \\ x-xy \\ y-xy \end{pmatrix}$
 $U_1: \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$
 $U_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
allineati nella retta $u: (y-x, 1-y, x-1)$
infine $R = u \wedge \pi: \begin{pmatrix} 1-x-y \\ x-xy \\ y-xy \end{pmatrix}$
 $S = u \wedge s: \begin{pmatrix} 1-x \\ y-x \end{pmatrix}$
 $T_0 = u \wedge (R_0 S_0): \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$
 $T_1 = u \wedge (R_1 S_1): \begin{pmatrix} 1-x \\ x-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x-y \\ 1-y \\ 1-x \end{pmatrix}$
 $T_2 = u \wedge (R_2 S_2): \begin{pmatrix} y-x \\ 1-y \\ x-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-2xy \\ x^2(1-y) \\ y^2(1-x) \end{pmatrix}$

- de Roppo: $O \in u \Leftrightarrow$ la retta $R_1 \vee S_1$ sono concorrenti
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in u \Leftrightarrow x=y$ e allora la ha nelle $R_1 \vee S_1$ sono
che concorrono in $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
e $(\pi \ s \ u \ O A) = (R_0 \ S_0 \ T_0 \ A) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -1$
1 $R_0 S_0$ qualche omogeneo



- per il punto • le 4 rette in A: $R_1 S_1, R_2 S_2, R_0 S_0, A O$
dovano essere omologhe, ovvero $(R_1 R_2 R_0 O) = -1$
 $(R_2 R_1 R_0 O) = -1$
 $(O R_0 R_1 R_2) = -1$
 $x = -1 = y$
oppure si controlla che i punti
 $(R_1 T_2) \wedge (R_2 T_1), (R_1 S_2) \wedge (R_2 S_1), (T_1 S_2) \wedge (T_2 S_1)$ stiano in $R_0 S_0$:
 $U_0 \Rightarrow 1=xy=x^2 \Rightarrow x=-1$
($x=1$ impossibile: scegliere $R_1=R_2$)
allora $x=-1=y$
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in R_0 S_0$

- se invece abbiamo $O \notin u$ risulta $x \neq y$
e da $R_0 S_0$ si tratta di collinearizzare per
 $R_1 \ T_1 \ S_1$ e $R_2 \ T_2 \ S_2$
da cui concludiamo:

③ $\begin{pmatrix} 1-x-y \\ x \\ y \end{pmatrix} = U_0 = R_1 S_1 \wedge R_2 S_1 \in R_0 S_0 \ (x_0=0)$
 $\uparrow$
 $1-x-y=0$
 $xy=1$, dunque $x+y-2xy=$
 $x+y-2=$
 $x+y-1-xy=$
 $-(1-x)(1-y)$

⑥ $R_1 T_2 \wedge R_2 T_1 \in R_0 S_0 \ (x_0=0)$
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x+y-2xy \\ x^2(1-y) \\ y^2(1-x) \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2-x-y \\ 1-y \\ 1-x \end{pmatrix} \right)$
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x+y-2 \\ x(x-1) \\ y(y-1) \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 2-x-y \\ 1-y \\ 1-x \end{pmatrix} \right)$
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -(1-x)(1-y) \\ x(x-1) \\ y(y-1) \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) \\ 1-y \\ 1-x \end{pmatrix} \right)$
 $\begin{pmatrix} * \\ -y(y-1) \\ (x-1)[x-1+y] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * \\ -(1-x) \\ (1-y)[1-x(1-x)] \\ [1-x+x^2] \end{pmatrix}$

prima coordinata:
 $(1-y)^2 [y(1-x+x^2)] - (1-x)^2 [x+y-1]$
 $[y-1+x]$
 $[x+y-1] (1-y)^2 - (1-x)^2$
 $[x+y-1] (x-y)(2-x-y)$
 $[x+y-1] (x-y)(x-1)(y-1)$

alternativa: i punti di $R_1 T_2$ e $R_2 T_1$ con
prima coordinata 0 sono:
 $\begin{pmatrix} 0 \\ x(x-1)+(1-x)(1-y) \\ y(y-1) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ (1-y)-(1-x)(1-y)x \\ 1-x \end{pmatrix}$

e imponiamo
che siano = $\begin{vmatrix} (1-x)(1-y-x) & (1-y)(1-x+x^2) \\ y(y-1) & (1-x) \end{vmatrix} = 0$

$(1-x)^2 (1-y-x) + (1-y)^2 (y(1-x+x^2))$
 $(y-1+x)$
 $(x+y-1) ((1-y)^2 - (1-x)^2)$
 $(x+y-1) (2-x-y)(x-y)$
 $(x+y-1) (1-x)(1-y)(x-y)$

Troviamo dunque le coordinate:
 $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

dunque $x + \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

ovvero i birapporti x, y sono EULERIANI (risolubili).

NOTA in questa condizione si può verificare che
i due fasci $O, \pi u, s, u$
e (così) $R_0 S_0, R_1 S_1, R_2 S_2$
sono prospettivi da 6 diversi punti!

② Scegliamo un riferimento
con $R, P \in R$
 $P_2, P_3 \in S$
 $U \in t$

allora: $\pi: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 0010 \\ 0001 \end{pmatrix}$
 $s: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \end{pmatrix}$
 $t: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

• Per punti $T_i \in t$, abbiamo $T_i = \begin{pmatrix} x_{0i} \\ x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_i + \alpha \\ \delta_i + \beta \\ \delta_i + \gamma \end{pmatrix}$
la retta u si trova come intersezione di due fasci:
 $(T_i \vee \pi) \wedge (T_i \vee s)$
 $\cos \begin{pmatrix} 10 & x_{0i} \\ 0 & x_{1i} \\ 0 & x_{2i} \\ 0 & x_{3i} \end{pmatrix} \cos \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{0i} \\ 0 & 0 & x_{1i} \\ 0 & 1 & x_{2i} \\ 0 & 0 & x_{3i} \end{pmatrix}$
 $(00-x_{2i} \ x_{2i}) \quad (-x_{1i} \ x_{1i} \ 0 \ 0)$

e due tali rette formano un sistema di det:

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -x_{2i} & x_{2i} \\ -x_{1i} & x_{0i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{2j} & x_{2j} \\ -x_{1j} & x_{0j} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_{2i} & x_{2i} \\ -x_{2j} & x_{2j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_{1i} & x_{0i} \\ -x_{1j} & x_{0j} \end{vmatrix}$
che si annulla se
 $\begin{vmatrix} \delta_i & \delta_j \\ \delta_i + \alpha & \delta_j + \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \vee \quad \begin{vmatrix} \delta_i + \beta & \delta_j + \beta \\ \delta_i + \gamma & \delta_j + \gamma \end{vmatrix} = 0$
 $\alpha(\delta_i - \delta_j) = 0 \quad (\beta - \gamma)(\delta_i - \delta_j) = 0$
se $\delta_i = \delta_j$ sse $T_i = T_j$, assurdo
perciò le rette sono 2 a 2 sghembe

Alternativa tecnica: se u_i, u_j fossero complanari,
allora in quel piano ci sarebbero 2 punti di t ,
2 punti di π (2 punti di s), assurdo.

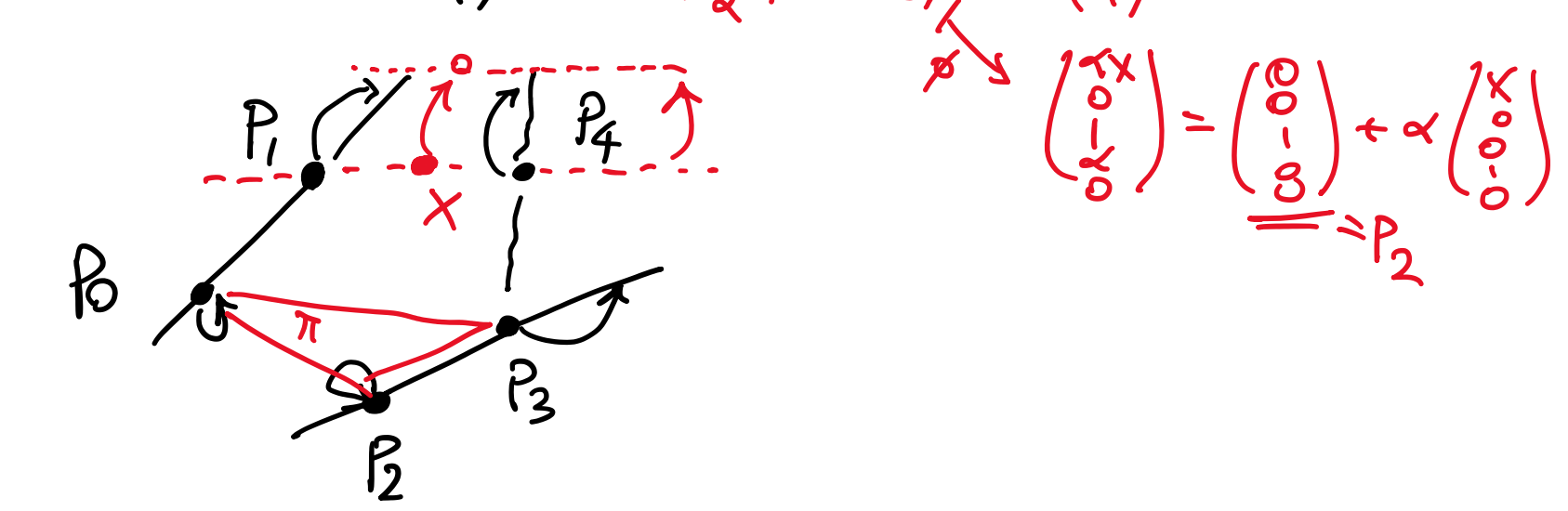
- Le proiezioni $\pi \rightarrow s$ di centro t scambiando R e proiezione R_i, S_i, T_i ,
 $\pi \rightarrow t$ di centro s che quindi hanno uguali birapporti.
 $s \rightarrow t$ di centro R
Alternativa: si fanno i conti! $\text{Foci: } T = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}$

- Le rette trasversali a u_0, u_1, u_2 (per es x, s, t , una ve ne è
una per ogni punto di u_2 le esempi) sono anche
incidenti con u_3 per questioni di proiezioni;
quindi i fasci carcati sono tutti e soli quelli
dei fasci di asse rette trasversali comuni
a u_0, u_1, u_2, u_3 ,
e i punti di intersezione su queste rette sono
queste proiezioni una sull'altra da una
qualsiasi altra retta trasversa, quindi i birapporti
sono tutti uguali.

③ $J = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 1 \\ x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ $P_0 P_1$ retta unita con P_0 punto unito
 $P_2 P_3 P_4$ piano unito con P_2 punto unito
(stesso centro α): $R \vee P_2$ rette di punti uniti

- * punti uniti sono quelli di $R \vee P_2$
- * i fasci carcati sono un fascio di asse $R \vee P_2$
(fascio equisecante $(01000), (00001)$)

dunque per i fasci $R \vee P_1 P_2 \vee X$ con $X \in P_1 \vee P_4$
e tutti convergono la retta dei punti carcati $R \vee P_2$:
se $X = P_1$ la plettività indotta ha indice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$
se $X \neq P_1$ la plettività indotta ha indice $\sim \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



le rette unite hanno plettività del tipo $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$,
se non identica, e usando $P = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} (\neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$
abbiamo
 $(P Q \oslash P \oslash Q) = \left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$
 $= (x \ y \ x + \frac{1}{\alpha} \ y + \frac{1}{\alpha})$
 $= (0 \ y-x \ \frac{1}{\alpha} \ (y-x) + \frac{1}{\alpha})$

che dipende da α e da $y-x$, ovvero dalla differenza
 $(R P \vee P) - (R P \vee Q)$ dei birapporti dove R, P, Q è il riferimento.
scarto sulla retta per esse unita isolare le coppie
 P, Q con tale differenza uguale danno risultati uguali.