prova di recupero di Geometria 1 parte A - 27 febbraio 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici dell'equazione $(Z - i)^3 = 8$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti esterni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4 :

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W : \begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad W' : \begin{cases} X_1 - X_3 + X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

- (1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W' . Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W' ; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
- (2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle proiezioni π_U^W e $\pi_U^{W'}$.
- (3) Le due proiezioni precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono proiezioni? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado al più 4 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \rightarrow V$ che manda $a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$ in $(a + e) + (b + a)X + (c + b)X^2 + (d + c)X^3 + (e + d)X^4$.

- (1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V .
- (2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$.
- (3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

- (1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A . Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ .
- (2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ^2 ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
- (3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A ? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.