seconda prova di Geometria 1 parte A - 28 giugno 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-1)^3 = 27$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti esterni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad W : \begin{cases} X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad W' : \begin{cases} X_1 - X_2 + X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_3 = 0 \end{cases}$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle simmetrie σ_U^W e $\sigma_U^{W'}$.
(3) Le due simmetrie precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono simmetrie? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi di grado al più 3 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ che manda $a + bX + cX^2 + dX^3$ in $(a+d) + (b+a)X + (c+b)X^2 + (d+c)X^3$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che ϕ^2 ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.