

quarta prova di Geometria 1 parte A - 25 agosto 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in \mathbb{C} dell'equazione $(Z - 1)^3 = -3$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4 :

$$U : \begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_3 - X_1 = 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (1) Trovare una base per U e delle equazioni cartesiane per W e W' . Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W' ; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
- (2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle simmetrie σ_W^U e $\sigma_{W'}^U$.
- (3) Le due simmetrie precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono simmetrie? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e coefficienti in \mathbb{R} . Consideriamo la funzione $F : V \rightarrow V$ che manda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} a - d & b + c \\ c - b & d + a \end{pmatrix}$.

- (1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V .
- (2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su \mathbb{C} , eventualmente trovando una base diagonalizzante per F .
- (3) Discutere la diagonalizzabilità di F su \mathbb{R} ed eventualmente trovare una base di V su \mathbb{R} in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in \mathbb{R}) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

- (1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A . Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ .
- (2) Esistono sottospazi W di K^5 tali che $(\phi - 1)^2$ ristretta a W sia diagonalizzabile? Se sì determinarne uno di dimensione massima.
- (3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A ? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.