quinta prova di Geometria 1 parte A - 8 settembre 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z-i)^3 = -i$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad W : \{ X_2 - X_3 - X_4 = 0 \quad \text{e} \quad W' : \{ X_1 - X_2 + X_3 = 0$$

(1) Trovare equazioni cartesiane per U e delle basi per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare basi per $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle proiezioni π_W^U e $\pi_{W'}^U$.
(3) Le due proiezioni precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono proiezioni?

Esercizio 3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ che manda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$, eventualmente trovando una base diagonalizzante per F.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(1) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di A. Determinare la forma di Jordan di A e una base jordanizzante per ϕ.
(2) Determinare le forme di Jordan di $(\phi+1)^i$ e $(\phi-1)^j$ per $i, j \in \mathbb{N}$.
(3) Quali sono le matrici di Jordan (non simili) di ordine 8 aventi lo stesso polinomio minimo di A? Per ciascuna di esse determinare la sequenza delle dimensioni degli autospazi generalizzati.