prima prova di Geometria 1 parte A - 12 febbraio 2024

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(Z+3/2)^3 = 1/8$. Determinare le equazioni hermitiane delle rette che passano per tali punti. Determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono invertendo le rette precedenti rispetto alla circonferenza unitaria. Rappresentare i dati precedenti in un disegno e identificare l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni al triangolo formato dalle radici trovate.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4:

$$U : \begin{cases} X_2 - X_4 = 0 \\ X_4 - X_1 = 0 \end{cases} \quad , \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) Trovare una base per U e delle equazioni cartesiane per W e W'. Dimostrare che U è in somma diretta sia con W che con W'; calcolare $W \cap W'$ e $W + W'$.
(2) Scegliere una base di K^4 e scrivere le matrici in tale base delle simmetrie σ_W^U e $\sigma_{W'}^U$.
(3) Le due simmetrie precedenti commutano tra di loro? Le due composizioni sono simmetrie? Sono diagonalizzabili?

Esercizio 3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e coefficienti in $\mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $F : V \to V$ che manda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$.
(1) Mostrare che F è lineare, e scriverne la matrice nella base canonica di V.
(2) Determinare i polinomi caratteristico e minimo di F e discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{C}$, eventualmente trovando una base diagonalizzante per F.
(3) Discutere la diagonalizzabilità di F su $\mathbb{R}$ ed eventualmente trovare una base di V su $\mathbb{R}$ in cui la matrice di F sia a blocchi diagonali (e coefficienti in $\mathbb{R}$) più semplici possibili.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo ϕ di K^5 di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in base canonica.
(1) Determinare la forma di Jordan di ϕ, delle sue potenze e delle potenze di $\phi - \mathrm{id}$.
(2) Trovare tutte le basi di K^5 jordanizzanti per ϕ.
(3) Determinare tutte le possibili matrici di Jordan (d'ordine qualsiasi) aventi stesso polinomio minimo e stesse dimensioni degli autospazi della matrice A.