prima prova Geometria 1 parte B - 28 giugno 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due piani:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro (spiegare).

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(\sigma) = \sigma$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono date tre rette r_0, r_1, r_2 due a due sghembe, e tre rette trasversali comuni s_0, s_1, s_2 distinte. Siano $A_{ij} = r_i \wedge s_j$, per $i, j = 0, 1, 2$ i nove punti di intersezione.

Per punti $R_i \in r_i$, per $i = 0, 1, 2$: mostrare che essi sono allineati se e solo se i tre birapporti $(A_{i0}\ A_{i1}\ A_{i2}\ R_i)$ coincidono per $i = 0, 1, 2$.

Definiamo $\mathcal{S}$ l'insieme delle rette trasversali comuni a r_0, r_1, r_2. Mostrare che le rette di $\mathcal{S}$ sono del tipo $R_0 \vee R_1$ dove $R_0 \in r_0$, $R_1 \in r_1$ sono tali che $(A_{00}\ A_{01}\ A_{02}\ R_0) = (A_{10}\ A_{11}\ A_{12}\ R_1)$.

Definiamo $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette trasversali comuni a s_0, s_1, s_2. Mostrare che ogni retta di $\mathcal{S}$ interseca ogni retta di $\mathcal{R}$ ma che due rette in $\mathcal{S}$ (o in $\mathcal{R}$) sono sempre sghembe.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di due rette sghembe tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$. Vi sono coppie di punti su quella retta tali che questo birapporto risulta armonico?