seconda prova Geometria 1 parte B - 17 luglio 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due sottospazi:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro (spiegare).

Esistono isometrie ϕ di $\mathbb{E}^4$ tali che $\phi(r) \subseteq \pi$ e $\phi(\pi) \supseteq r$?

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 in posizione generale, siano π_i i piani generati dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente ai piani π_i. Definiamo P'_i per $i = 0, 1, 2, 3$ i punti di intersezione di $O \vee P_i$ con π_i, e π'_i i piani generati dai punti P'_j con $j \neq i$.

Per punti $Q_i \in O \vee P_i$, per $i = 0, 1, 2, 3$: mostrare che essi sono complanari se e solo se i quattro birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ Q_i)$ hanno somma 1.

Mostrare che le rette date dalle intersezioni $\pi_i \wedge \pi'_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$ sono complanari, e siano S_i i punti di intersezione di tale piano con le rette $O \vee P_i$; determinare i birapporti $(O\ P_i\ Q_i\ S_i)$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta e un piano sghembi tra loro. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P un punto unito e Q punto non unito; determinare il birapporto $(P\ Q\ \phi Q\ \phi^2 Q)$. Vi sono casi in cui questo birapporto risulta armonico?