terza prova Geometria 1 parte B - 25 agosto 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: ______________ **Nome:** ______________ **Matricola:** _______

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due sottospazi affini:

$$\pi = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, inf e sup dei due sottospazi, l'angolo tra loro (spiegare).

Determinare tutte le isometrie ϕ di $\mathbb{E}^4$ tali che $\phi(\pi) = \sigma$. Quali sono le immagini di σ per tali isometrie?

Esercizio 3. In un piano proiettivo sono dati tre punti P_0, P_1, P_2 in posizione generale, siano r_i le rette generate dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente alle rette r_i. Definiamo P'_i per $i = 0, 1, 2$ i punti di intersezione di $O \vee P_i$ con r_i; siano r'_i le rette generate dai punti P'_j con $j \neq i$.

Per punti $Q_i \in O \vee P_i$, per $i = 0, 1, 2$: mostrare che essi sono allineati se e solo se i tre birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ Q_i)$ hanno somma 1.

Mostrare che i punti dati dalle intersezioni $r_i \wedge r'_i$ per $i = 0, 1, 2$ sono allineati, e siano S_i i punti di intersezione di tale retta con le rette $O \vee P_i$; determinare i birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ S_i)$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha solo due punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, sia P un punto non unito; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$. Vi sono casi in cui questo birapporto risulta armonico?