quarta prova Geometria 1 parte B - 8 settembre 2023

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: ______________ **Nome:** ______________ **Matricola:** _______

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sono dati due sottospazi affini:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, inf e sup dei due sottospazi, distanza e angolo tra loro (spiegare).

Determinare tutte le isometrie ϕ di $\mathbb{E}^4$ tali che $\phi(\pi) = \sigma$. Quali sono le immagini di σ per tali isometrie?

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 in posizione generale, siano π_i i piani generati dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente ai piani π_i. Siano P'_i per $i = 0, 1, 2, 3$ punti sulle rette $O \vee P_i$ distinti da quelli già dati e π'_i i piani generati dai punti P'_j con $j \neq i$.

Mostrare che le rette date dalle intersezioni $\pi_i \wedge \pi'_i$ per $i = 0, 1, 2, 3$ sono complanari, sia σ tale piano.

Siano S_i i punti di intersezione del piano σ con le rette $O \vee P_i$; mostrare che i birapporti $(O\ P_i\ P'_i\ S_i)$ sono tutti uguali per $i = 0, 1, 2, 3$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti esattamente quelli di una retta. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\ \phi P\ Q\ \phi Q)$.