quinta prova Geometria 1 parte B - 12 febbraio 2024

Il compito va svolto in due ore (30 minuti per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura, su carta scrivendo a mano.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, possibilmente su una facciata A4, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta. Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _______________ **Nome:** _______________ **Matricola:** ________

Testo del compito:

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico si considerino le tre rette:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determinino le posizione reciproche delle coppie di rette. Per ogni punto T di t non appartenente ad $r \cup s$, si calcolino le equazioni cartesiane della retta per T e complanare con r, s; in questo modo si trovano tutte le rette complanari con le tre date (eventualmente, trovare quelle mancanti)? Si descriva tramite equazioni cartesiane l'insieme formato dalla unione di tali rette (complanari alle tre date).

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ munito del sistema di riferimento canonico sono dati un piano e una retta:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad , \quad r = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Trovare equazioni cartesiane per i due sottospazi. Si determini la posizione reciproca, si calcoli la distanza e le coppie di punti di minima distanza, l'angolo tra loro.

Si determinino, se esistono, tutte le isometrie ϕ tali che $\phi(\pi) = \pi$ e $\phi(r) = r$.

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 è dato un riferimento P_0, P_1, P_2, P_3, U, e (per ogni $i = 0, 1, 2, 3$) sia P'_i il punto dato dalla intersezione della retta $U \vee P_i$ con il piano generato dai P_j per $j \neq i$.

Mostrare che anche i punti $P'_0, P'_1, P'_2, P'_3, U$ formano un riferimento.

Dati quattro punti $Q_i \in U \vee P_i$, per $i = 0, 1, 2, 3$: mostrare che essi sono complanari se e solo se i birapporti $(U\ P_i\ P'_i\ Q_i)$ hanno somma 1.

Determinare i punti $R_i \in U \vee P_i$, per $i = 0, 1, 2, 3$, che siano complanari e tali che i birapporti $(U\ P_i\ P'_i\ R_i)$ siano uguali tra loro.

Esercizio 4. Una proiettività ϕ di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha esattamente tre punti uniti. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.

Sia P un punto non unito tale che $P, \phi(P), \phi^2(P)$ siano allineati; mostrare che la retta che li contiene è unita e determinare il birapporto $(P\ \phi P\ \phi^2 P\ \phi^3 P)$.