Geo1-22/3-11-Complessi1

venerdì 30 settembre 2022 16:00

Le parti in ROSSO sono indici/riassunti.

Numeri complessi: (AGLQ cap. 0, sett. 7, 9.1)
- motivazione
- definizione ed operazioni
- notazioni con radici (inf, parti reali, parti immag ...)
- coniugato, modulo, inversi (COORD. ESPONENZIALE / CARTESIANE)
- forma TRIGONOMETRICA (COORD POLARI) versore, argomento, (int. geom. del prodotto).

Esercizi della settimana:

① • calcolare: $\frac{1+i}{1-i} =$

• in generale, scrivere la formula per $\frac{a+ib}{c+id} =$ (con $c+id \neq 0$)

② • risolvere l'equazione nell'incognita z: $z^2 = \bar{z}^2$ in almeno 2 modi diversi.

• discutere in generale le equazioni in z: $z^2 = a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$; $\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma = 0$ con $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$.

Definizione: CAMPO ((COMPLET.) FIELD)

è insieme K con 2 operazioni (binarie)

$+ : K \times K \longrightarrow K$, $(x,y) \longmapsto x+y$ (somma)

t.c.

(K,+) GRUPPO:
- (S1) associativa $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in K$
- (S2) el. neutro: $\exists 0 \in K$ (zero): $x+0 = x = 0+x$ $\forall x \in K$
- (S3) esistenza opposti: $\forall x \in K$ $\exists x' = -x$ (opposto di x) t.c. $x+x' = 0 = x'+x$

(S4) commutativa: $x+y = y+x$ $\forall x,y \in K$.

$\cdot : K \times K \longrightarrow K$, $(x,y) \longmapsto x \cdot y = xy$ (prodotto)

t.c.

$K^* = K \setminus \{0\}$ è GRUPPO per $\cdot$:
- (P1) associativa $(xy)z = x(yz)$
- (P2) el. neutro $\exists 1 \in K$: $x1 = x = 1x$
- (P3) esist. inversi: $\forall x \neq 0$ $\exists \bar{x} = x^{-1} = \frac{1}{x} \in K$ t.c. $x\bar{x} = 1 = \bar{x}x$

(P4) comm: $xy = yx$ $\forall x,y \in K$.

(D) distributività: $x(y+z) = xy + xz$ $\forall x,y,z \in K$

Esempi:

① $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots,n\dots\}$ NON è campo (P3, P5)

② $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n \dots\}$ NON è campo (P5) (ma si dice ANELLO (RING))

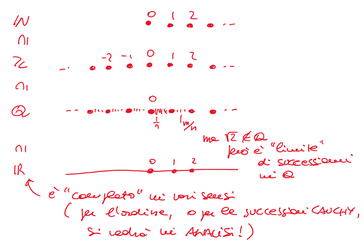
③ $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ sse $pq' = p'q$ } Algebra

È UN CAMPO (più piccolo campo che contiene $\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $n \longmapsto \frac{n}{1}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \longrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{2}q = p \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$ ↯

④ $\mathbb{R}$ numeri REALI } Analisi



Esempi: X insieme:

$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ $\mathcal{P}(X)$ con queste due operazioni non è ?

$(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ che struttura ha?

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

---

① MOTIVAZIONE ('500 ⇝ '800)

certi polinomi REALI (es x^2+1) non hanno zeri in $\mathbb{R}$

($\mathbb{R}$ è campo NON algebricamente chiuso:
def: un campo è alg. chiuso se ogni polinomio in quel campo in una variabile x ha almeno uno zero in quel campo)

[Ruffini $P(x)$ polinomio, $a \in K$, $P(a)=0 \Leftrightarrow (x-a) \mid P(x)$ (DIVIDE) $P(x) = (x-a)Q(x)$]

Idea: aggiungere al $\mathbb{R}$ un elemento i (immaginario) tale che $i^2 = -1$, e vediamo se possiamo dare una STRUTTURA di CAMPO:

$a \in \mathbb{R}$, $i \notin \mathbb{R}$, ia
$b \in \mathbb{R}$, $b+ia$

$\boxed{\mathbb{C} := \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R} \}} \supseteq \mathbb{R}$ $(b=0)$

nota se voglio definire $+$ e $\cdot$ tra elementi di $\mathbb{C}$ in modo che sia campo:

devo: $(x+iy)+(a+ib) = x+iy+a+ib = x+a+iy+ib = (x+a)+i(y+b)$

Significato geometrico della $+$: REGOLA DEL PARALLELOGR.

$(x+iy)(a+ib) = xa + ixb + iya + i^2yb$ (-1) $= (xa-yb) + i(xb+ya)$

Significato geometrico del PRODOTTO? vediamo!

quindi $+$ e $\cdot$ sono definiti UNICAMENTE, ma soddisfano le proprietà di CAMPO?

$(x+iy)1 = (x+iy)(1+i0) = (x1-y0) + i(x0+y1) = x+iy$

$-(x+iy) = (-x) + i(-y)$ OPPOSTO

$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1$ ($x+iy \neq 0$) INVERSO!

Definizione formale (da algebristi):

$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(a,b),(x,y) \longmapsto (a,b)+(x,y) = (a+x, b+y)$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(a,b),(x,y) \longmapsto (a,b)(x,y) = (ax-by, ay+bx)$

e poi dimostro tutte le proprietà di campo!

(relazione con prima: $(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)(1,0) + (b,0)(0,1) = a\,1 + b\,i = a+ib$)

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto (x,0) = x+i0 \end{array} \right)$

$(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (\underbrace{-1}_{-1}, 0)$

questo elemento è una radice quadrata di -1...

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ campi ORDINATI $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$, $xz \leq yz$ $(z \geq 0)$

$\Rightarrow$ i $\square$ sono ≥ 0 $(x^2 \geq 0$ $\forall x \in K)$

$\mathbb{C}$ non è campo ordinato (perché $i^2 = -1 < 0$ ↯, $1 > 0 \Leftrightarrow -1 < 0$) (non esiste un ordine che rispetti le operazioni di campo)

Relazioni tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

① c'è inclusione: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $x \longmapsto x+i0 = (x,0)$

$f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ ($\cdot$ in $\mathbb{R}$, $\cdot$ in $\mathbb{C}$) (inclusione = che rispetta le operazioni di CAMPO rispetta $+$, $\cdot$)

attenzione: $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, $y \longmapsto iy = (0,y)$

$g(y \cdot y') = iyy'$

$g(y) \cdot g(y') = iy \cdot iy' = i^2yy' = -yy'$

questa funzione è iniettiva, ma non rispetta il prodotto!

$Re : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = x+iy \longmapsto Re(z) := x$ "parte reale di z"

$Im : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto Im(z) := y$ "parte immaginaria di z"

"$z \in \mathbb{C}$ è reale sse $z = Re(z)$ sse $Im(z) = 0$"

"$z \in \mathbb{C}$ è puramente immag. sse $z = i\,Im(z)$ sse $Re(z) = 0$"

Queste funzioni rispettano $+$ ma non $\cdot$, però: $\boxed{\forall z \in \mathbb{C} : z = Re(z) + i\,Im(z)}$

Osservazione: cosa succede scambiando i con $-i$?

esiste una funzione: CONIUGIO $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z} := x-iy$ ($z = x+iy$)

che è un AUTOMORFISMO di CAMPO:
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (facile) $\forall z,w \in \mathbb{C}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (fa conti)
- $\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{(a+ib)(x+iy)} = \overline{(a+ib)}\,\overline{(x+iy)} = (a-ib)(x-iy)$?

Nota: $z = \bar{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$z = -\bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Nota: in $\mathbb{Q}$ unico automorfismo di campo è la funzione identica (se $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ rispetta $+$ e $\cdot$):
perché $f(1) = 1$
$f(n) = f(1+\dots+1) = 1+\dots+1 = n$
$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{f(n)} = 1/n$
$f(p/q) = f(p \cdot \frac{1}{q}) = p\frac{1}{q} = p/q$ (ALGEBRA)

in $\mathbb{R}$ unico automorfismo di campo ordinato o continuo è identità, (ANALISI)
invece su $\mathbb{C}$ c'è anche coniugio!

DEFINIZIONE per $z = x+iy$

di solito usiamo x, y COORD. CARTESIANE di z

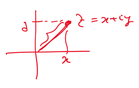
chiamiamo $z, \bar{z}$ COORD. ERMITIANE di z

$\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$

OSSERVAZIONE: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2$ reale, positivo se $z \neq 0$, nullo sse $z = 0$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$



abbiamo $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $z \longmapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

che si dice norma o modulo dei $\mathbb{C}$:

(N1) $|z| = 0$ sse $z = 0$ (infatti $x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y$)
(N2) $|zw| = |z||w|$ ($|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}\,w\bar{w} = |z|^2|w|^2$)
(N3) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (subadd. o $\leq$ triangolare)

(verifica di N3)
$z = x+iy$
$w = x'+iy'$

$|z+w| \overset{?}{\leq} |z| + |w|$

$|z+w|^2 \overset{?}{\leq} (|z| + |w|)^2$

$(x+x')^2 + (y+y')^2 \overset{?}{\leq} \left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2}\right)^2$

$\cancel{x^2} + \cancel{x'^2} + 2xx' + \cancel{y^2} + \cancel{y'^2} + 2yy'$ $\qquad$ $\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2} + 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}$

$xx' + yy' \overset{?}{\leq} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}$

se ≤ 0, ok, supponiamo ≥ 0

$(xx'+yy')^2 \overset{?}{\leq} (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)$

$\cancel{x^2x'^2} + \cancel{y^2y'^2} + 2xx'yy' \overset{?}{\leq} \cancel{x^2x'^2} + x^2y'^2 + y^2x'^2 + \cancel{y^2y'^2}$

$0 \overset{?}{\leq} x^2y'^2 + y^2x'^2 - 2xx'yy'$

$0 \leq (xy' - yx')^2$ //

NOTA $\boxed{|zw|^2 = |z|^2|w|^2}$ dice la formula della somma dei due prodotti:

$\boxed{(z^2+b^2)(x^2+y^2) = (zx-by)^2 + (zy+bx)^2}$

"IL PRODOTTO DI SOMME DI 2 QUADRATI È SOMMA DI 2 QUADRATI"

vale per 1, 2, 4, 8 quadrati, ma non per altre somme! Perché? Difficile ...

04/10/2022 (2h)

Riassunto: $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$ campo

notazioni con $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto x+i0 = x$

$\mathbb{C} \xrightarrow{Re} \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \xrightarrow{Im} \mathbb{R}$, $z = x+iy$

$z = Re(z) + i\,Im(z)$

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$ ($z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$)

coniugio è automorfismo di campo: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$

$z\bar{z} = x^2+y^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $= 0$ sse $z = 0$, $=: |z|^2$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

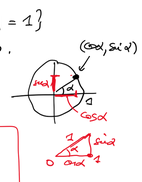
$\begin{cases} |z| = 0 \text{ sse } z = 0 \\ |zw| = |z||w| \\ |z+w| \leq |z| + |w| \end{cases}$

Forma TRIGONOMETRICA (o POLARE) dei numeri complessi:

$z \in \mathbb{C}$ ($z = x+iy$): $|z|^2 = 1$, $|z| = 1$, $\boxed{x^2+y^2 = 1}$

$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ $:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ CIRCOLO UNITARIO.

$\exists$ Esiste $\vartheta \in [0, 2\pi)$: $\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases}$



$|z| = 1$ allora $z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ (per $\vartheta \in [0, 2\pi)$) $= \mathrm{cis}(\vartheta)$ (cos, i, sin)

ARGOMENTO DEL NUMERO COMPLESSO

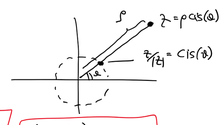
$z \in \mathbb{C}$ qualsiasi $\neq 0$ ($z = x+iy$), $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_{>0}$

$\boxed{z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$

$\frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}^1$, $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$

$= \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

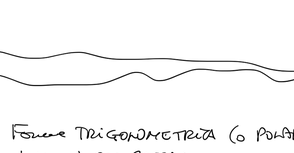
$= \sqrt{\ }\left(\frac{x}{\sqrt{\ }} + i\frac{y}{\sqrt{\ }}\right)$



$\boxed{z = x+iy \ (x,y)}$ CARTESIANE, $\boxed{(z, \bar{z})}$ ERMITIANE, $\boxed{(\rho, \vartheta)}$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[0, 2\pi)$ POLARI

Significato geometrico del PRODOTTO:

$z \cdot z' = (x+iy)(x'+iy')$
$= (xx'-yy') + i(xy'+yx')$?
$= (\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)) \cdot (\rho'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta'))$
$= \rho\rho'((\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta'))$
$= \rho\rho'((\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta') + i(\cos\vartheta\sin\vartheta' + \sin\vartheta\cos\vartheta'))$
$= \rho\rho'(\cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta'))$



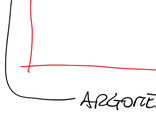
$zz' = (\rho\rho')\,\mathrm{cis}(\vartheta+\vartheta')$

Si ottiene da z moltiplicando per $|z'| = \rho'$ e ROTANDO di ANGOLO ϑ'

Esempio: $z \cdot i$ è z ROTATO di $90° \cong \pi/2$

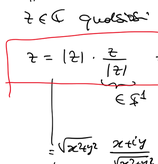
$i = 0 + 1i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1\ \mathrm{cis}(\pi/2)$

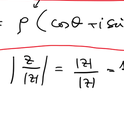
rotazione di $\frac{\pi}{4}$ = moltiplicazione per $\mathrm{cis}(\pi/4) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$



Potenze di z: $z = x+iy$
$\Rightarrow z^n = (x+iy)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x)^j (iy)^{n-j}$

$z = \rho\,\mathrm{cis}(\vartheta)$
$\Rightarrow z^n = \rho^n\,\mathrm{cis}(n\vartheta)$





Useremo questo la settimana prossima per capire le radici nei numeri complessi!

TRIGONOMETRIA:

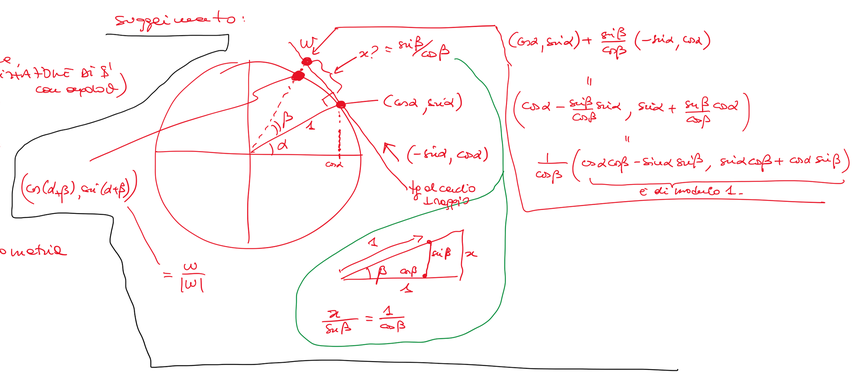
- $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$ (definizione, PARAMETRIZZAZIONE DI $\mathbb{S}^1$ con angolo ϑ)

$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$

come si trovano le formule di addizione?

(tutte le altre formule di trigonometria seguono da queste!)

suggerimento:



$(\cos\alpha, \sin\alpha) + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(-\sin\alpha, \cos\alpha)$

$= \left(\cos\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\sin\alpha, \sin\alpha + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos\alpha\right)$

$= \frac{1}{\cos\beta}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$ è di modulo 1.

05/10/2022 (1h)