Abbiamo i numeri complessi per studiare la GEOMETRIA DEL PIANO:

- DISTANZA TRA 2 PUNTI
- ANGOLO TRA 3 PUNTI → CARNOT, PITAGORA
  - ANGOLI CENTRO/CIRCONFERENZA
- RETTE E CIRCONFERENZE (come luoghi/luoghi)
- ALLINEAMENTO DI PUNTI
- ORTOGONALITÀ
- ~~EULERO, TORRICELLI~~ (circonferenza per 3 punti)
- GEOMETRIA DEI TRIANGOLI
  - punti notevoli: e retta di Eulero
  - triangoli simili
  - triangoli equilateri (Napoleone, Morley, ...)

((AGELI, cap. 0, sez. 7.7.2))

Esercizi:

① Scrivere le radici cubiche di i, determinare le equazioni biunitarie delle rette per quei punti, determinare centro e raggio delle circonferenze che si ottengono tenendo invariata della variabile z ($z = e^{i\pi/6}$).

② Data una retta di equazioni biunitarie $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2c = 0$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$), e un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, scrivere le equazioni biunitarie della retta per z_0 e
- parallela alla prima
- ortogonale alla prima
- che forma con la prima un angolo dato α_0.

RIPASSO:

$\bar{z} = \frac{x}{|z|^2} + \frac{1}{i}\frac{y}{|z|^2} = \frac{1}{i}\cos(\theta)$

punto sulla retta per 0 e z tale che: "il prodotto delle ascisse di 0 per z^{-1}"

$\bar{z} = x - iy$

$\boxed{\bar{z} = x - iy = \rho\cos(-\theta) + \rho\cos(\pi - \theta)}$

$\bar{z} + z = \frac{2x}{|z|^2} = \frac{2\rho\cos\theta}{\rho^2 \cos^2\theta} = \frac{1}{\rho}\cos(\theta) = \frac{1}{\rho}\cos(\pi - \theta)$

$\cos\theta + i\sin\theta$

$\omega, |\omega| = 1$

$\omega = \omega^{-1}$

"$\cos\theta - i\sin\theta$"

Esempi di radici in opera:

Sesta di 1 (equazione risolvente $x^6 - 1 = 0$)

Sesta di -1: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$

Sesta di i? (equazione risolvente di $\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{6})/6$)

Fattorizzazioni: $(x^2+1)(x^2-1)\cdots$

$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

$x^2 + x + 1$: $(x - e^{\frac{2\pi}{3}i})(x - e^{-\frac{2\pi}{3}i})$, $x^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{3})x + 1$, $x^2 - x + 1$ (soluzioni $\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$)

$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$x^5 - 1 = (x-1)(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + 1)(x + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1)$

$(x - e^{\frac{2\pi}{5}i})(x - e^{-\frac{2\pi}{5}i})$, $x^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})x + 1$, $x^2 - 2\frac{\sqrt{5}-1}{4}x + 1$

$(x - e^{\frac{4\pi}{5}i})(x - e^{-\frac{4\pi}{5}i}) = x^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})x + 1 = x^2 + 2\frac{\sqrt{5}+1}{4}x + 1$

Geometria del PIANO

$\begin{cases} \text{CARTESIANO } \mathbb{R}^2 \\ \text{GENIALE } \mathbb{C} \text{ (operazioni } +, \cdot) \end{cases}$

$x + iy \quad z = x + iy$

① distanza tra punti: $z, w \in \mathbb{C}$

$d(z,w) := |z - w|$
$= |(z-w) + i(y-b)|$
$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$(z,w) \longmapsto d(z,w) = |z - w|$

Esercizio: (a) $d(z,w) = 0$ SE $z = w$
(b) $d(z,w) = d(w,z) \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$
(b') $d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w) \quad \forall z,u,w \in \mathbb{C}$
DISUG. TRIANGOLARE

ATTENZIONE NORMA ≠ DISTANZA

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $z \longmapsto |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$|z| = 0$ SE $z = 0$
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
$|z + w| \leq |z| + |w|$
incidono la SCALARE ALGEBRICA

$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(z,w) \longmapsto d(z,w)$

$d(z,w) = 0$ SE $z = w$
$d(z,w) = d(w,z)$
$d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w)$

Stesso $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$d(z,w) = |z - w|$

Stesso in $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$d(z+w, w+z) = d(w,z)$

Incidono per traslazione. $|(z+w) - (w+z)|$

② ANGOLI: dati tre punti $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Caso più semplice: $z_0 = 0$, $z_1 = z$, $z_2 = w$ numeri di norma 1 ($\in S^1$)

$\boxed{w = z \cdot e^{i\theta}}$ int. gran prodotto

$e^{i\theta} = \frac{w}{z} = \bar{z} w$

$\theta := \frac{1}{i}\log(\bar{z} w)$

$\cos\theta + i\sin\theta$

$\begin{cases} \cos\theta = Re(\bar{z} w) \\ \sin\theta = Im(\bar{z} w) \end{cases}$

$\begin{cases} z = x + iy \\ w = a + ib \end{cases} \Rightarrow \cos(\theta) = Re(\bar{z} w) = Re((x - iy)(a + ib)) = xa + yb$

angolo $(z_1 \hat{z_0} z_2)$ = angolo (z, w)
$= \bar{z} w$
$= \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|} \cdot \frac{z_2 - z_0}{|z_2 - z_0|}$

$\boxed{\cos(\text{angolo } z_1 \hat{z_0} z_2) = \frac{Re((\bar{z_1} - \bar{z_0})(z_2 - z_0))}{|z_1 - z_0| \, |z_2 - z_0|}}$

$z_0 = x_0 + iy_0$
$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$

$= \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\sqrt{\ldots}}$

formula analitica per $\cos\theta$

PITAGORA, CARNOT:

$|z_2 - z_1|^2 = |(z_2 - z_0) - (z_1 - z_0)|^2$
$= (z_2 - z_0) - (z_1 - z_0)(\overline{z_2 - z_0} - \overline{z_1 - z_0})$
$= (z_2 - z_0)(\overline{z_2 - z_0}) + (z_1 - z_0)(\overline{z_1 - z_0}) - [(z_2 - z_0)(\overline{z_1 - z_0}) + (z_1 - z_0)(\overline{z_2 - z_0})]$
$= |z_2 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2 - 2\,Re(\overline{z_1 - z_0}(z_2 - z_0))$
$= |z_2 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2 - 2\,|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0|\cos(\theta)$

$Re(\bullet(\bullet)(\bullet))$

Dunque abbiamo la formula del CARNOT:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$

In particolare, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos(\theta) = 0$

abbiamo il T. di PITAGORA

$\boxed{\text{l'angolo alla circonferenza} = \frac{1}{2}\text{ angolo al centro}}$

dimostrazione usando $\mathbb{C}$:

$z \cdot e^{i2\theta} = w$

$e^{i2} = \frac{\bar{z} - 1}{|z - 1|} \cdot \frac{w - 1}{|w - 1|}$

$e^{i2} = (e^{i\theta})^2 = \frac{(\bar{z} - 1)^2}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} \cdot \frac{(w - 1)^2}{(w - 1)(\bar{w} - 1)}$

$= \frac{\bar{z} - 1}{z - 1} \cdot \frac{w - 1}{\bar{w} - 1}$

$\left(\begin{array}{l} \bar{z} = z^{-1} \cdot \frac{1}{z} \\ \bar{w} = w^{-1} \cdot \frac{1}{w} \end{array}\right)$

$= \frac{\frac{1}{z} - 1}{z - 1} \cdot \frac{w - 1}{\frac{1}{w} - 1}$

$= \frac{\frac{1 - z}{z}}{z - 1} \cdot \frac{w - 1}{\frac{1 - w}{w}} = \frac{w}{z} = e^{i2\theta}$

poiché $|z| = 1$, $|w| = 1$

$\Rightarrow ?? = 2\theta$
$\Rightarrow ? = \theta$ //

RETTE E CIRCONFERENZE NEL PIANO

Nel piano cartesiano le rette hanno equazioni in X, Y del tipo

$\boxed{aX + bY + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}}$

$Y = mX + q$

usando $z = X + iY$, $\bar{z} = X - iY$

$X = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $Y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

allora i punti della retta soddisfano:

$a\frac{z + \bar{z}}{2} + b\frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0$

$a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) + 2c = 0$

$(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} + 2c = 0$

$\boxed{\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2c = 0} \quad \alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$

Circonferenza di centro $\alpha \in \mathbb{C}$ e raggio $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

= punti distanti R da α:

z tali che $|z - \alpha|^2 = R^2$

$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) - R^2 = 0$

$z\bar{z} - \bar{\alpha} z - \alpha \bar{z} + \underbrace{\alpha\bar{\alpha} - R^2}_{\mathbb{R}} = 0$

$\boxed{z\bar{z} - \bar{\alpha} z - \alpha \bar{z} + c = 0 \quad \alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}}$

$\alpha = a + ib$, $z = x + iy$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

NOTA: relazione tra

reale $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + c = 0$

e circo $z\bar{z} - \bar{\alpha} z - \alpha \bar{z} + c = 0$

se usiamo la funzione INVERSIONE

$\begin{cases} z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \longmapsto 1/z$

$\longrightarrow$ iniettiva?

retta $= \{ z : \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + c = 0 \}$

iniettiva $= \{ \frac{1}{z} \mid \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + c = 0 \}$

$= \{ w = \frac{1}{z} : \bar{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\frac{1}{\bar{w}} + c = 0 \}$

$= \{ w : \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + c\, w\bar{w} = 0 \}$

$= \{ z : c z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = 0 \}$

se $c = 0$ (retta per origine, resta retta per origine)

se $c \neq 0$ (retta $\not\ni$ origine, diventa circonferenza che contiene l'origine!)

RETTA PER DUE PUNTI:

domanda: DATI 2 PUNTI $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

quando sono allineati?

SSE $(z_1 - z_0) = \text{reale} \cdot (z_2 - z_0)$

SSE $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \in \mathbb{R}$

$\boxed{\frac{a+ib}{a-ib} = ab - bc}$

SSE $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z_2 - z_0}}{\overline{z_1 - z_0}}$

SSE $(z_2 - z_0)(\overline{z_1 - z_0}) = (\overline{z_2 - z_0})(z_1 - z_0)$

SSE $(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad) = 0$

SSE $\begin{vmatrix} z_1 - z_0 & \overline{z_1 - z_0} \\ z_2 - z_0 & \overline{z_2 - z_0} \end{vmatrix} = 0$

determinante di matrice 2×2

Dati due punti $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (distinti):

la retta per z_1 e z_2 è formata dagli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$(z_2 - z)(\overline{z_1 - z}) = (\overline{z_2 - z})(z_1 - z)$

$z_2\overline{z_1} - z_2\bar{z} - \bar{z}_1 z + \cancel{z\bar{z}} = \bar{z}_2 z_1 - \bar{z}_2 z - \bar{z}_1 z + \cancel{z\bar{z}}$

$\boxed{(\overline{z_2 - z_1})z + (\underbrace{z_2\overline{z_1} - \overline{z_2} z_1}_{\beta - \bar{\beta}})\bar{z} = 0}$

$\boxed{\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + c = 0}$ reale

Nel caso $z_1, z_2 \in S^1$ allora $z_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$

$\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{z}\right)\bar{z} + (z - w)\bar{z} + \left(\frac{w}{z} - \frac{z}{w}\right) = 0$

$\frac{1}{wz}\left(z - w\right)\bar{z} + (z - w)zw\bar{z} + (w^2 - z^2) = 0$

$(w - z)(w + z)$

$\boxed{\bar{z} + zw\bar{z} = w + z}$

$\boxed{\bar{z} + zw\bar{z} = w + z'}$

intersezione $z = ?$

11/10/2022

GEOMETRIA DEI TRIANGOLI:

punti notevoli: $A, B, C \in \mathbb{C}$ non allineati

G = BARICENTRO = $\cap$ delle MEDIANE

H = ORTOCENTRO = $\cap$ delle ALTEZZE

K = CIRCOCENTRO = $\cap$ degli ASSI (= centro CERCHIO CIRCOSCR.)

L = INCENTRO = $\cap$ delle BISETTRICI (= centro cerchio INSCRITTO)

(ci sono anche EXCENTRI ...)

Teorema di EULERO:

G, H, K sono sempre allineati (retta EULERO) e L è retta-Eulero SOLO tramite accidente

per verificare il risultato possiamo con TRASLAZIONI E DILATAZIONI supporre che $A, B, C \in S^1$ (punti del cerchio unitario): allora

$G = \frac{A + B + C}{3}$ (sempre vero!)

$H = A + B + C$

$K = 0$ (perché: S^1 CIRCOCENTRO ABC)

$L = ?$

facile $H = A + B + C$: basta vedere che $H - A \perp B - C$, $H - B \perp A - C$, $H - C \perp A - B$

verifichiamo

$\frac{H - A}{B - C} = \frac{A + B + C - A}{B - C} = \frac{B + C}{B - C} = \frac{B + C}{B - C} \cdot \frac{\overline{B - C}}{\overline{B - C}} = \frac{B\overline{B} - B\overline{C} + \overline{B}C - C\overline{C}}{|B - C|^2} = i\frac{Im(B\overline{C})}{|B - C|^2} \in i\mathbb{R}$

"disponendo di ROTAZIONI per $\perp$ TRA LORO"

VEDERE L è più difficile, conviene sempre meglio le coordinate, sviluppando il calcolo:

bisettrici:
ωA: $\alpha \in -\beta\gamma$
ωB: $\beta^{-1} \in \beta$
ωC: $\beta^{-1} \in \gamma$

equazione B: $z + \gamma\beta\bar{z} = \gamma^2 + \beta$
C: $z + \gamma\beta^{-1}\bar{z} = \gamma + \beta$

$\beta^{-1} - \beta^{-1}$: $(\beta - \gamma)z = \beta(\gamma^2 + \beta) - \gamma(\gamma + \beta)$
$= \beta\gamma^2 + \beta^3 - \gamma^2 - \gamma\beta^2$
$= \beta\gamma(\gamma - \beta) + (\beta - \gamma)(\beta^2)$
$= (\beta - \gamma)(-\beta\gamma - \beta\gamma^2)$

quindi è $L \rightsquigarrow z = -\beta\gamma$

Quando $K = 0$, $H = A + B + C$, $L = -\beta\gamma$

Sono allineati?

SSE $\frac{H - K}{L - K} = \frac{H}{L}$ è reale

SSE $Im(\frac{H}{L}) = 0$

SSE $Im((1 + \beta^{-1} + \gamma^{-1})(\bar{\beta} + \bar{\gamma} - \bar{\beta}\bar{\gamma})) = 0$

SSE $(1 + \beta^{-1} + \gamma^{-1})(\bar{\beta} + \bar{\gamma} - \bar{\beta}\bar{\gamma}) - (1 + \bar{\beta}^{-1} + \bar{\gamma}^{-1})(\beta + \gamma - \beta\gamma) = 0$
$(1 + \beta^{-1} + \gamma^{-1})(\bar{\beta} + \bar{\gamma} - \bar{\beta}\bar{\gamma}) - (1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})(\beta + \gamma - \beta\gamma) = 0$

SSE .....

SSE $\frac{1}{\beta^{-1}\gamma^{-1}}(\underbrace{\beta\gamma - 1}_{=0 \text{ SSE ISOSCE A}})(\underbrace{\beta + \gamma^2}_{=0 \text{ SSE ISOSCELE C}})(\underbrace{\gamma + \beta^2}_{=0 \text{ SSE ISOSCELE B}}) = 0$ //

SIMILITUDINE DI TRIANGOLI:

due triangoli $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e z_0, z_1, z_2 sono simili se

$\omega_i = \alpha + \rho e^{i\theta} z_i$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

SSE $\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$

infatti: $\Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = \frac{\rho e^{i\theta} z_1 - \rho e^{i\theta} z_0}{\rho e^{i\theta} z_2 - \rho e^{i\theta} z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$

$\Leftarrow$ l'uguaglianza dice che:

i lati sono proporzionali e l'angolo compreso lo stesso.

Un particolare:

Un triangolo z_0, z_1, z_2 è EQUILATERO

SSE simile a $1, \omega, \omega^2$, $\omega^3 = \bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$ con ω RADICE CUBICA di 1 ($\neq 1$, per es. $e^{i2\pi/3}$)

SSE $\frac{\omega - 1}{\omega^2 - 1} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$

SSE $(z_1 - z_0)(\omega + 1) = z_2 - z_0$

SSE $z_2 - (1 + \omega)z_1 + \omega z_0 = 0$

(moltiplicando per ω^2)

$z_1\omega^2 - (\omega^2 + 1)z_1 + \omega^2 z_0 = 0$

$1 + \omega + \omega^2 = 0$

SSE $\boxed{z_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 = 0}$

Cioè riconosciamo se un triangolo è equilatero da una semplice equazione.

Con questa formula è dimostrato alcuni teoremi tipo:

NAPOLEONE:

TRIANGOLI EQUILATERI

TRIANGOLO QUALSIASI

BARICENTRI

il triangolo dei baricentri è SEMPRE EQUILATERO!

MORLEY:

TRISETTRICI

TRIANGOLO QUALSIASI

il triangolo formato dai punti di intersezione di TRISETTRICI ADIACENTI è SEMPRE EQUILATERO!