Geo1-22/3-14-Complessi4

venerdì 30 settembre 2022 16:02

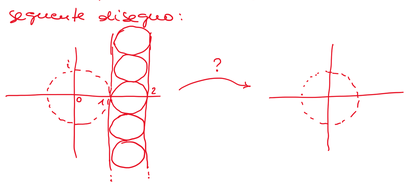
ALCUNE FUNZIONI SUI NUMERI COMPLESSI:

- TRASF. DI MOEBIUS (o TLF: TRASF. LINEARI FRATTE)
- TRASLAZIONI, DILATAZIONI, INVERSIONI, decomposizione
- Proiezione stereografica (e uso di ∞ in $\mathbb{C}$)
- inversioni rispetto a rette/circonferenze

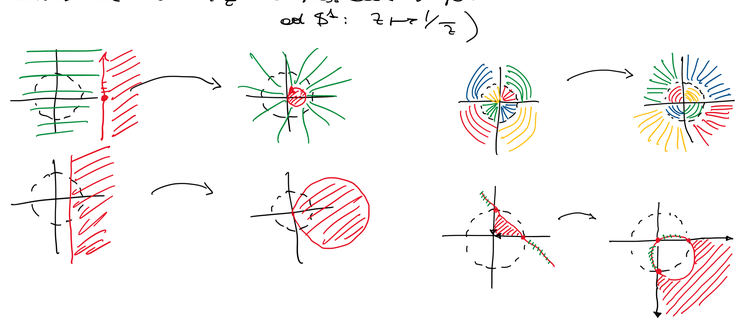
((AGLR, Cap 0, sez 7.9.3))

Esercizi della settimana:

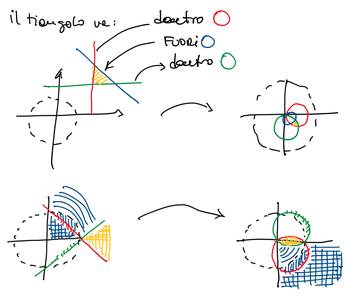
Determinare l'immagine tramite inversione rispetto alla circonferenza unitaria del seguente disegno:



Inversione: $z \mapsto 1/z$ (Riflessione rispetto ad S^1: $z \mapsto 1/\bar{z}$)



il triangolo va:



trasformazioni di Moebius (o TLF TRASF. LIN. FRATTE)

sono funzioni del tipo

$$\varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz} \qquad \boxed{\text{con } ad-bc \neq 0 \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0}$$

e sono funzioni

$$\mathbb{C} \setminus \{-a/b\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{d/b\}$$

biiezione

se $w = \frac{c+dz}{a+bz}$ allora tutto z risolvendo:

$ad-bc \neq 0$

$$w(a+bz) = c+dz$$
$$wa + bzw = c+dz$$
$$z(bw-d) = c-aw$$
$$\boxed{z = \frac{c-aw}{-d+bw}} \quad (bc-ad \neq 0)$$

Nota: si mette la condizione $ad-bc \neq 0$ perché altrimenti è una funzione COSTANTE:

se $ad-bc=0$

abbiamo $ad = bc$

e $\varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz} = \frac{c}{a}\frac{ac+adz}{ac+bcz} = \frac{c}{a}$ //

Nota: tra le trasformazioni di Moebius ci sono:

$\varphi(z) = \alpha + z$ TRASLAZIONI

$\varphi(z) = \beta z$ ROTO DILATAZIONE $\begin{cases} \beta \in \mathbb{R}: \text{DILATAZIONE} \\ \beta \in \mathbb{C} \setminus S^1: \text{ROTAZIONE} \end{cases}$

$\varphi(z) = \frac{1}{z}$ inversione

$\varphi(z) = \alpha + \beta z$ TRASF. AFFINI $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (sono definite su tutto $\mathbb{C}$)

Quindi $\varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz}$

si scrive come composizione $= \varphi_1 \circ i \circ \varphi_2$

dove φ_1 e φ_2 sono AFFINI

e $i(z) = 1/z$:

$$z \overset{\varphi_2}{\longmapsto} a+bz \longmapsto \frac{1}{a+bz} \overset{\varphi_1}{\longmapsto}$$

$$\boxed{w \longmapsto \alpha + \beta w}$$

con α, β tali che

$$\alpha + \beta \frac{1}{a+bz} \equiv \varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz}$$

$$\frac{\alpha(a+bz)+\beta}{a+bz}$$

$$\frac{(\alpha a+\beta)+(\alpha b)z}{a+bz} \qquad \begin{cases} \alpha a + \beta = c \\ \alpha b = d \end{cases}$$

quindi si trovano unicamente α, β //

Quindi per capire le TRASF. MOEBIUS basta capire:

- QUELLE AFFINI $\varphi(z) = \alpha + \beta z$ che sono facili: TRASLAZIONI, DILATAZIONI, ROTAZIONI
- L'inversione $\varphi(z) = 1/z$: $\hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $0 \longmapsto \infty$, $\infty \longmapsto 0$

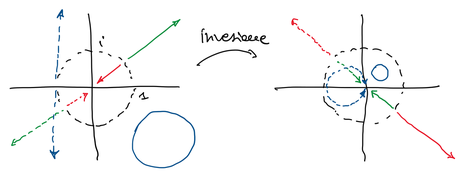
e abbiamo già visto che

rette per 0 $\longleftrightarrow$ rette per 0

rette $\not\ni 0$ $\longleftrightarrow$ circonferenze per 0

circonferenze $\not\ni 0$ $\longleftrightarrow$ circonferenze $\not\ni 0$

FARSI QUALCHE DISEGNO:



12/10/2022

Le trasf. di Moebius non si compongono tra loro perché possono essere definite su DOMINI DIVERSI ($\mathbb{C}$ tolto un punto che dipende da φ...), ma possiamo usare:

$$\boxed{\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}}$$

con operazioni $\boxed{\begin{array}{l} \infty + x := \infty \quad \forall x \\ \infty \cdot x := \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \infty & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{array}}$

ATTENZIONE: la struttura algebrica è rovinata:

$$x \cdot \infty \cdot 0 \begin{cases} (x\infty)\cdot 0 = \infty \cdot 0 = 1 \\ x(\infty \cdot 0) = x \cdot 1 = x \end{cases}$$

(non è nemmeno associativo)

PERÒ POSSIAMO DEFINIRE per $\boxed{\varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz}}$

$$\hat{\varphi}: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$
$$z \longmapsto \varphi(z)$$
$$-a/b \longmapsto \infty \qquad \frac{*}{a+b(-\frac{a}{b})} = \frac{*}{0}$$
$$\infty \longmapsto d/b \qquad \frac{c+d\infty}{a+b\infty} = \frac{d\infty}{b\infty} = \frac{d}{b}$$

$\mathbb{C} \setminus \{-a/b\}$

E ALLORA POSSIAMO CONSIDERARE le tr. Moebius come funzioni $\hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$,

e l'insieme delle trasf. Moebius FORMA UN GRUPPO PER COMPOSIZIONE (NON COMMUTATIVO):

$(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3 = \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3)$

$id(z) = z$ è elemento neutro: $\varphi \circ id = id \circ \varphi = \varphi$

dato $\boxed{\varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz}}$ $\quad w = \frac{c+dz}{a+bz}$

c'è inverso $\varphi^{-1}(z) = \frac{-c+az}{d-bz}$ $\quad z =$ funzione di w

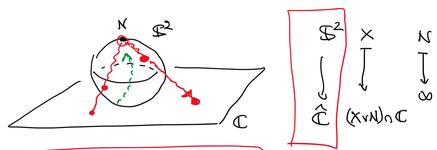
(tale che $\varphi \circ \varphi^{-1} = id = \varphi^{-1} \circ \varphi$).

$\boxed{id: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto z} \Rightarrow \boxed{id: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \ z \longmapsto z, \ \infty \longmapsto \infty}$

Significato geometrico:

$$\boxed{\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longleftrightarrow \text{SFERA}}$$

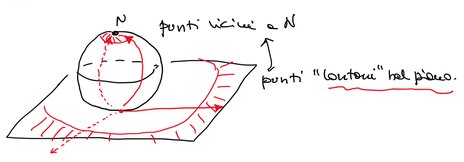
tramite proiezione stereografica:



$$\boxed{\begin{array}{ccc} S^2 & x & N \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hat{\mathbb{C}} & (x \vee N) \cap \mathbb{C} & \infty \end{array}}$$

Così le tr. Moebius sono funzioni dalla sfera nella sfera!

Nota:



Quanti dati servono per DETERMINARE una trasformazione di Moebius?

E' necessario e sufficiente dare l'immagine di 3 punti distinti:

DATI $a, b, c \in \mathbb{C}$ distinti

ESISTE una unica φ tale che $\varphi(a) = \infty$, $\varphi(b) = 0$, $\varphi(c) = 1$ (MOEBIUS)

ED È

$$\varphi(z) = \frac{c-a}{c-b}\,\frac{z-b}{z-a}$$

perché $\varphi(b) = 0$; perché $\varphi(a) = \infty$; perché $\varphi(c) = 1$

Quindi date due terne a, b, c e α, β, γ $(\in \mathbb{C})$ di numeri complessi distinti, possiamo trovare per composizione la tr. Moebius φ t.c. $\begin{cases} \varphi(a) = \alpha \\ \varphi(b) = \beta \\ \varphi(c) = \gamma \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} a & \infty & \alpha \\ b & 0 & \beta \\ c & 1 & \gamma \end{pmatrix}$

oppure ricavare da:

$$\boxed{\frac{c-a}{c-b}\,\frac{z-b}{z-a} = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\,\frac{\varphi(z)-\beta}{\varphi(z)-\alpha}, \text{ perché?}}$$

$\begin{pmatrix} a & \infty \\ b & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \infty \\ \beta & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$

Dati 4 numeri complessi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ = zeta greca l'espressione

$$\boxed{(\alpha\beta\gamma\delta) := \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} \cdot \frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}}$$

si chiama "BIRAPPORTO di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$", ed è INVARIANTE PER TRASF. MOEBIUS:

se $\boxed{\varphi(z) = \frac{c+dz}{a+bz}}$ $\quad \frac{c+d\gamma}{a+b\gamma} \quad \frac{c+d\alpha}{a+b\alpha}$

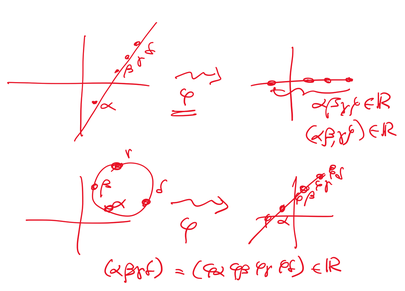
allora $(\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)\,\varphi(\gamma)\,\varphi(\delta)) = \frac{\varphi(\gamma)-\varphi(\alpha)}{\varphi(\gamma)-\varphi(\beta)} \cdot \frac{\varphi(\delta)-\varphi(\beta)}{\varphi(\delta)-\varphi(\alpha)} =$

$= \dots\dots$

$= (\alpha\beta\gamma\delta)$ //

E si può vedere che: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

$(\alpha\beta\gamma\delta) \in \mathbb{R}$ SSE $\left(\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} / \frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta} \in \mathbb{C}\right)$ $\Rightarrow$ i punti sono su una RETTA o $\Leftarrow$ su una CIRCONFERENZA



e quindi l'equazione della circonferenza per 3 punti α, β, γ è data da:

$$(\alpha\beta\gamma z) = \overline{(\alpha\beta\gamma z)} \in \mathbb{R}$$

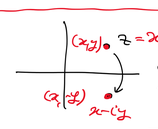
(se α, β, γ sono allineati viene una retta).

$$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\,\frac{z-\beta}{z-\alpha} = \frac{\bar{\gamma}-\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}-\bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{\beta}}{\bar{z}-\bar{\alpha}} \rightsquigarrow * z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0$$

ULTIMO APPUNTO:

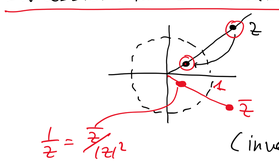
Le tr. di Moebius NON contengono alcune funzioni importanti per la geometria, per esempio:

RIFLESSIONI RISPETTO A RETTA:



riflessione rispetto all'asse ascisse: $\boxed{z \mapsto \bar{z}}$

RIFLESSIONI RISPETTO A CIRCONFERENZA:



riflessione rispetto alla circonf. unitaria: $\boxed{z \mapsto 1/z}$

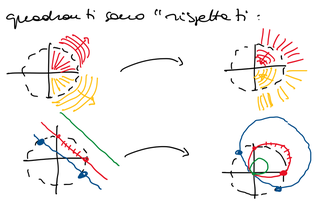
(inversione dal coniugato).

$\varphi(z) = \frac{1}{z}$

non è una trasformazione di Moebius, ma la geometria è più visibile:

ogni punto di S^1 va in sé stesso, (non nel coniugato!)

i quadranti sono "rispettati":



aggiunta 17/10/2022