Geo1-22/3-21-SpaziVett1

martedì 11 ottobre 2022 14:15

SPAZI VETTORIALI:
- MOTIVAZIONI (strutture algebriche su $\mathbb{R}^n$?)
- ESEMPI DI CAMPI K ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p, K(X), \dots$ caratteristica dei campi?)
- DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE (conseguenze algebriche facili ...)
- ESEMPI FONDAMENTALI ($V_n(K)=K^n$, $M_{n,m}(K)$, $K[X]$, $K[[X]]$, X^K e $X^{(K)}$, $\mathbb{C}$ sp.vett su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$, non esempio $V=\mathbb{R}$, + usuale, $\cdot=0$)
- PRODOTTI CARTESIANI
- SOTTOSPAZI (operazioni e struttura di reticolo).
- QUOZIENTI

((AGLQ, cap. I, sez. 1, 2))

Esercizi settimana:

⊙ dati $u=\binom{1}{2}$, $v=\binom{2}{1}\in\mathbb{R}^2$ disegnare i seguenti insiemi

$\{\alpha u+\beta v \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
$\{\ \text{"}\ \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}_{\geq 0}\}$
$\{\ \text{"}\ \mid \alpha,\beta\in[0,1]\}$
$\{\ \text{"}\ \mid \alpha,\beta\in[0,1],\ \alpha+\beta=1\}$
$\{\ \text{"}\ \mid \alpha+\beta\leq 1\}$
$\{\ \text{"}\ \mid \alpha,\beta\in[0,1],\ \alpha+\beta\leq 1\}$
$\{\ \text{"}\ \mid \alpha+\beta\leq 1\}$

quali sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$?
Inventare un analogo esercizio in $\mathbb{R}^3$.

⊙⊙ Sia V spazio vettoriale sul campo K, sia A un insieme qualsiasi, sia $\varphi: V\to A$ biiezione insiemistica con $\psi: A\to V$ funzione inversa.
Mostrare che possiamo DEFINIRE su A una struttura di sp. vett. su K nel seguente modo:

$a\oplus a' := \varphi(\psi(a)+\psi(a'))$ $\forall a,a'\in A$
$\lambda\odot a := \varphi(\lambda\psi(a))$ $\forall a\in A, \forall\lambda\in K$.

("TRASPORTO DI STRUTTURA DA V AD A tramite φ")

Quali strutture di sp. vett. su $\mathbb{R}_{>0}$ si ottengono usando $\varphi=\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$, $x\mapsto e^x$ (usando su $\mathbb{R}$ la struttura usuale) e $\varphi=\text{molt}\times x_0: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x_0x$ (usando su $V=\mathbb{R}$, dominio, la struttura usuale).

⊙⊙⊙ Usando $K=\mathbb{F}_p$ campo con p elementi, sia $V=V_n(K)=V_n(\mathbb{F}_p)$ $(=\mathbb{F}_p^n)$:
contare il numero di vettori di V,
determinare il numero di sottospazi DISTINTI DI DIMENSIONI $1,2,3,\dots,n-1$ di V.

Nota: $\mathbb{R}$ è campo
$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ è campo
$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ ⓘ?
non può avere struttura di campo (cioè un prodotto come per $\mathbb{C}$)
però per $\mathbb{R}^4$ sì (HAMILTON) ma si fa solo per $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^8$.
E per gli altri $\mathbb{R}^n$?
Si studia la struttura di SPAZIO VETTORIALE.

Idea: diamo una definizione di "SPAZIO VETTORIALE SU un campo K" in modo da "DISTILLARE le proprietà geometriche di $\mathbb{R}^n$ $(K=\mathbb{R})$".

Definizione: sia K campo ($\alpha\in K$: α = SCALARI)
(K è insieme K con operazioni $+,\cdot$ con le proprietà di campo)
allora un insieme V si dice spazio vettoriale su K se: ($v\in V$: v = VETTORI)
V è dotato di due operazioni:

$\boxed{+_V: V\times V\longrightarrow V,\ (v,w)\longmapsto v+w}$ in modo che $(V,+)$ sia GRUPPO abeliano (commutativo)

(SV1) $(v+w)+u=v+(w+u)$ $\forall v,w,u\in V$
(SV2) $\exists\, 0=0_V\in V$: $v+0_V=v=0_V+v$ $\forall v\in V$
(SV3) $\forall v\in V, \exists(-v)$: $v+(-v)=0_V=(-v)+v$
(SV4) $v+w=w+v$ $\forall v,w\in V$

$\boxed{\cdot: K\times V\longrightarrow V,\ (\alpha,v)\longmapsto\alpha v}$

(PS1) $(\alpha+_K\beta)v=\alpha v+_V\beta v$ $\forall\alpha,\beta\in K$ $\forall v\in V$
(PS2) $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$ $\forall\alpha\in K$, $\forall v,w\in V$
(PS3) $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$ $\forall\alpha,\beta\in K$, $\forall v\in V$
(PS4) $1_K v=v$ $\forall v\in V$

Piccole conseguenze algebriche:

① dato un vettore $v\in V$ allora $-v=(-1)\cdot v$
($-v$: unico vettore che + con v dà 0_V; $(-1)\cdot v$: prodotto (-1) con v)

dimostro che $(-1)v$ è l'unico vettore che sommato con v dà 0_V:
$v+((-1)v)\overset{(PS4)}{=}1\cdot v+(-1)v\overset{(PS1)}{=}(1+(-1))v$ (somma in K) $=0_K\cdot v=0_V$

bisogna vedere che $0_K\cdot v=0_V$ ($\in K$, $\in V$; $0v=0$): come si fa?

per esempio: $v\overset{(PS4)}{=}1_K\cdot v=(1+0_K)v$
$=1\cdot v+0_K v$ (PS1)
$v=v+0_K\cdot v$ (PS4)
sommo $(-v)$ ⟹ (SV3): $(-v)+v=(-v)+v+0_K\cdot v$
$0_V=0_V+0_K\cdot v$
⟹ (SV2): $0_V=0_K\cdot v$ (per ogni $v\in V$)

Problema: $\alpha 0_V=0_V$ $\forall\alpha\in K$?

(0) ancora prima: 0_V è unico:
se ce ne fossero 2, siano 0_V e $0_V'$ avremmo
$0_V=0_V+0_{V'}=0_V'$ (perché $0_V'$ zero; perché 0_V zero) (elementi neutri +: $v+0_V=v$ $\forall v$ usato $v=0_V'$; $v+0_V'=v$ $\forall v$ usato $v=0_V$)

dato v, l'opposto $-v$ è unico: se ce ne fossero 2, siano v',v'' avremmo $v'+v+v''$ $=(v'+v)+v''=0_V+v''=v''$, $=v'+(v+v'')=v'+0_V=v'$ uguali!

② Attenzione: (SV4) + commutativa è una conseguenza degli altri:
$\forall v,w$: $-(v+w)=(-w)+(-v)$ [$(v+w)+((-w)+(-v))$, $v+(-v)=0$]
$=(-1)(v+w)=(-1)v+(-1)w=(-v)+(-w)$
usando $-v,-w$ ⟹ $v+w=w+v$ // ($(-1)(-1)v$, $(-1)(-1)w$)

Però si lascia lo stesso come assioma per semplicità.

ALTRE PROPRIETÀ DA DIMOSTRARE
se $\alpha v=\alpha w$ con $\alpha\in K$, $\alpha\neq 0$ allora $v=w$ (in V)
se $\alpha v=\beta v$ con $v\in V$, $v\neq 0$ allora $\alpha=\beta$ (in K)
"leggi di cancellazione"

17/10/2022

Quali campi K possiamo usare?

$K=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

$\boxed{K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{F}_p}$ dove p numero primo
$A/\sim=\{[a]\mid a\in A\}$ (elementi $\sim$ ...) $\subseteq A$
$A=\mathbb{Z}$
$\sim\ \equiv$ $a\sim b$ $(\in\mathbb{Z})$ se $p\mid(a-b)$ divide
$0\sim p$
$1\sim p+1\sim p^2+1\sim 2p+1$

$\mathbb{F}_5=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$, $[2]=[7]$ ...

0 1 2 3 4
0 | 0 0 0 0 0
1 | 0 1 2 3 4
2 | 0 2 4 1
3 | 0 3
4 | 0 4

$[2][3]=[1]$

$2\cdot3=6\sim1$
$[2][3]=[6]=[1]$

$\dots -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\dots$ $\mathbb{Z}$, $p=3$
$[0]=\{0,3,6,9,\dots\}$
$[1]=\{1,4,7,10,\dots,-2,-5,\dots\}$
$[-1]=[2]=\{2,5,8,\dots,-1,\dots\}$

K campo
$K[X]$ = polinomi con coefficienti in K $=\{\sum_{i=0}^n a_iX^i \mid n\in\mathbb{N}, a_i\in K\}$ (coefficienti)
$K(X)$ = frazioni di polinomi (con denom. $\neq 0$) $=\left\{\frac{P(X)}{Q(X)} \mid P(X),Q(X)\in K[X], Q\neq 0\right\}$
ANELLO $+,\cdot$; X non ha $\frac{1}{X}$; CAMPO

Se K è un campo, allora esiste unica una funzione $\mathbb{Z}\xrightarrow{\varphi=\varphi_K}K$ tale che $\varphi(0)=0_K$, $\varphi(1)=1_K$ e rispetta la somma e opposti.
infatti: $\varphi(n)=\varphi(1+1+\dots+1)$
$=\varphi(1)+\varphi(1)+\dots+\varphi(1)$
$=1_K+1_K+\dots+1_K$

due possibilità: ① φ iniettiva allora K contiene una copia di $\mathbb{Z}$, dunque contiene una copia di $\mathbb{Q}$ (CAMPI DI CARATTERISTICA ZERO)
② φ non è iniettiva: esiste $n\in\mathbb{Z}$: $\varphi(n)=0$ e allora $n=p$ PRIMO
K contiene una copia di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\mathbb{F}_p$ (CAMPI DI CARATTERISTICA p).

((ALGEBRA: per ogni p primo in $\mathbb{Z}$ e ogni $q=p^f$ esiste un unico campo $\mathbb{F}_q$ che ha esattamente q elementi ed è di caratteristica p))
NON è $\mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z}$; qui $[p]^f=[p^f]=[0]$, $[p]\neq 0$ (in un campo se $x^i=0$ allora $x=0$)

Se K campo, V spazio vettoriale su K: $V,+,\cdot$ con opportune proprietà ($V\times V\to V$, $K\times V\to V$)

Esempi di SPAZI VETTORIALI: fissiamo K

① $V_n(K):=K^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \mid x_i\in K\right\}$

con operazioni:
$+$: "componente per componente"
$V_n(K)\times V_n(K)\longrightarrow V_n(K)$
$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)\longmapsto v+w:=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$ (somma in K)
x_i COMPONENTI DEL VETTORE, $v=(x_i)$
soddisfa (SV 1-4) con $0_V=\begin{pmatrix}0_K\\\vdots\\0_K\end{pmatrix}$, $-v=\begin{pmatrix}-x_1\\\vdots\\-x_n\end{pmatrix}$

$\cdot$: $K\times V_n(K)\longrightarrow V_n(K)$
$(\alpha,v)\longmapsto\alpha v:=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}$
"ogni componente è molt. per α"

$\boxed{V_n(K)=(K^n,+,\cdot)\ \text{SPAZIO VETTORIALE STANDARD DI DIMENSIONE } n \text{ su } K.}$

Note: ogni $v\in V_n(K)$ si scrive come
$v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x_2\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\x_3\\\vdots\end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\x_n\end{pmatrix}$
$=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+\dots+x_ne_n$

"ogni vettore di $V_n(K)$ si scrive in modo unico come COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $e_1,e_2,\dots,e_n$"
$v=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ //

$\boxed{\text{NOTA}: V_1(K)=K \text{ "retta"},\ V_2(K)=K^2 \text{ "piano"}}$

Note: $V=K^n$
$+$ = "componente per componente"
$\cdot$: $K\times V\to V$, $(\alpha,v)\longmapsto 0_V$ ⟹ $\boxed{\alpha\cdot v=0_V\ \forall\alpha,\forall v;\ \alpha=1: 1\cdot v=0_V}$
NON è uno spazio vettoriale su K perché non soddisfa (PS4), ma soddisfa tutto il resto!
quindi (SV1-4) PS(1-3) $\not\Rightarrow$ PS4. $\boxed{1\cdot v=v}$

② Matrici: $M_{n,m}(K):=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&&\ddots&\\a_{n1}&&\dots&a_{nm}\end{pmatrix}, a_{ij}\in K\right\}$ n righe, m colonne, "$(a_{ij})_{i=1..n,\ j=1..m}$"
con $+$ "entrata per entrata" $(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$
con $\cdot$ $\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$
$M_{n,1}(K)=V_n(K)$
$M_{1,m}(K)$ "matrici riga" o "vettori riga"
$(a_{ij})=\sum a_{ij}e_{ij}$, $e_{ij}=\begin{pmatrix}0&\vdots&0\\\dots&1&\dots\\0&\vdots&0\end{pmatrix}$

③ Polinomi: K campo
$K[X]=\{P(X)=\sum_{i=0}^n a_iX^i \mid a_i\in K, n\in\mathbb{N}\}$
con $+$ quella dei polinomi
$\cdot$ $K\times K[X]\to K[X]$, $(\alpha,P(X))\longmapsto\alpha P(X)=\sum(\alpha a_i)X^i$ ($P(X)=\sum a_iX^i$)

NOTA per scrivere tutti i polinomi bisogna fare combinazioni lineari di $1,X,X^2,X^3,X^4,\dots,X^n,\dots$

$K[X]_{\leq n}:=\{\text{polinomi di grado}\leq n\}\subseteq K[X]$ dove n è FISSATO!
è spazio vettoriale, e ogni suo vettore si scrive usando $X^0=1,X,X^2,\dots,X^n$ — $n+1$ elementi.

④ SERIE FORMALI:
$K[[X]]=\{\sum_{i=0}^\infty a_iX^i \mid a_i\in K\}$
con $+$ componente × componente: $\sum a_iX^i+\sum b_iX^i=\sum(a_i+b_i)X^i$
e $\cdot$ $\alpha(\sum a_iX^i)=\sum(\alpha a_i)X^i$

NOTA qui non è vero che ogni $v\in K[[X]]$ si scrive come SOMMA FINITA di multipli di $1,X,X^2,X^3,\dots,X^i,\dots$

$K[X]\subseteq K[[X]]$

⊛ sia X un insieme qualsiasi
definiamo due spazi vettoriali:
① $K^{(X)}=\{\varphi:X\to K : \varphi \text{ funzione che vale } 0 \text{ su quasi tutti } x\in X\}$ ("TUTTI gli x TRANNE PER UN NUMERO FINITO")
$+$ $(\varphi+\psi)(x):=\varphi(x)+\psi(x)$; se φ,ψ si annullano quasi ovunque anche $\varphi+\psi$ si annulla quasi ovunque
$\cdot$ $(\alpha\varphi)(x)=\alpha\varphi(x)$ si annulla quasi ovunque.

② $K^X=\{\varphi:X\to K : \varphi \text{ funzione qualsiasi}\}$
$+$ $(\varphi+\psi)(x):=\varphi(x)+_K\psi(x)$
$\cdot$ $(\alpha\varphi)(x):=\alpha\varphi(x)$

se $X=\{1,2,\dots,n\}$ ⟹ $K^X=V_n(K)$
se $X=\mathbb{N}$ ⟹ $K^X\cong K[[X]]$

NOTA $K^{(X)}\subseteq K^X$ (tutte funzioni $X\to K$; funzioni $X\to K$ quasi ovunque nulle).
se X è finito come insieme, allora sono =
se X è infinito, allora sono ≠
esempio: se $X=\mathbb{N}$ allora $K^{(\mathbb{N})}\subseteq K^{\mathbb{N}}$; $K[T]\subseteq K[[T]]$
$\{\varphi:\mathbb{N}\to K\}$
$\varphi:\mathbb{N}\to K$, $0\mapsto x_0$, $1\mapsto x_1$, $2\mapsto x_2$, ..., $n\mapsto x_n$, 0 ... ↔ $\sum x_iT^i$; $(x_0,x_1,\dots,x_n,0,0,\dots0\dots)$
$\mathbb{N}\to K$, $i\mapsto x_i$ ↔ $\sum x_iT^i$; $(x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)$

18/10/2022

Riassunto degli esempi di base:

se X è insieme finito, l'insieme $K^X:=\{\varphi:X\to K \mid \text{funzioni qualsiasi}\}$ è SPAZIO VETTORIALE su K, e gli esempi precedenti sono "CASI PARTICOLARI":

(1) $X=\{1,\dots,n\}$: $K^X\cong V_n(K)$; $\begin{pmatrix}\varphi:X\to K\\i\mapsto x_i\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$
(2) $X=\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}=\{(i,j) \mid i=1..n, j=1..m\}$: $K^X\cong M_{n,m}(K)$; $\varphi:X\to K$, $(i,j)\mapsto a_{ij}$ ↔ $\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1m}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{nm}\end{pmatrix}$
(3) $X=\{0,1,\dots,n\}$: $K^X\cong K[T]_{\leq n}$; $\begin{pmatrix}X\to K\\0\mapsto a_0\\1\mapsto a_1\\\vdots\\j\mapsto a_j\end{pmatrix}$ ↔ $\sum_{i=0}^n x_iT^i$

se X è insieme infinito,
$K^{(X)}=\{\varphi:X\to K : \varphi\ q.o.\ 0\}$ ⊆ $K^X=\{\varphi:X\to K\}$
($\varphi(x)=0$ $\forall x$ quasi ogni; $\varphi(x)\neq0$ solo per un numero finito di $x\in X$)
$X=\{0,1,2,\dots,n,\dots\}=\mathbb{N}$
$\mathbb{N}\to K$, $i\mapsto a_i$ ↔ $\sum_{i=0}^n a_iT^i$: $K^{(\mathbb{N})}\subseteq K^{\mathbb{N}}$, $K^{(\mathbb{N})}\cong K[T]\subseteq K[[T]]\cong K^{\mathbb{N}}$

⊛ $V_1(K)=K$ è sp. vettoriale su K
⊛⊛ $\mathbb{C}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ ($+: \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\cdot: \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$)
è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($+$ $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\cdot$ $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$) $\alpha\in\mathbb{C}$, $=\alpha\cdot1$; $\alpha\in\mathbb{C}$ $=x+iy=1\cdot x+i\cdot y$, $1,i\in\mathbb{C}$, $x,y\in\mathbb{R}$
è spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ ($+$ $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\cdot$ $\mathbb{Q}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$) ⓘ
⊛⊛ $\mathbb{R}$ è sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ (dim 1)
è sp. vett su $\mathbb{Q}$ (dim ∞ ....)

Come costruire spazi vettoriali a partire da spazi vettoriali dati?
(1) PRODOTTI ✓
(2) SOTTOSPAZI ✓
(3) QUOZIENTI

(1) se V e W sono sp. vett. sullo stesso campo K, allora possiamo dare al prodotto cartesiano
$V\times W:=\{(v,w): v\in V, w\in W\}$ (insieme)
una unica struttura di sp. vettoriale su K definendo:
$+_p$: $(V\times W)\times(V\times W)\longrightarrow(V\times W)$
$((v,w),(v',w'))\longmapsto(v,w)+_p(v',w'):=(v+_Vv',w+_Ww')$
$\cdot_p$: $K\times(V\times W)\longrightarrow V\times W$
$(\alpha,(v,w))\longmapsto\alpha\cdot_p(v,w):=(\alpha v,\alpha w)$

cioè usando le operazioni su ciascuna coordinata.
Esercizio: tutte le proprietà di sp.vett sono rispettate, in particolare:
$0_{V\times W}=(0_V,0_W)$
$-(v,w)=(-v,-w)$ ....

• per induzione si definiscono anche i prodotti di n fattori: $V_1,\dots,V_n$ sp. vettoriali su K, allora
$V_1\times\dots\times V_n=\prod_{i=1}^nV_i=\{(v_1,\dots,v_n) \mid v_i\in V_i\ \forall i=1,\dots,n\}$
con $+$ e $\cdot$ definite su ciascuna coordinata.

$V_1\times V_2\times V_3=V_1\times(V_2\times V_3)\cong(V_1\times V_2)\times V_3$

esempio se $V_i=K$ $\forall i=1,\dots,n$ allora $\prod_{i=1}^nV_i=K^n=V_n(K)$

problema: $V_n(K)\times V_m(K)\cong V_{n+m}(K)$
$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\right)\leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$
$\underbrace{V_n(K)\times\dots\times V_n(K)}_{m \text{ volte}}\cong M_{n,m}(K)$
$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\right)\leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1&y_1&\dots&z_1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_n&y_n&\dots&z_n\end{pmatrix}$

problema: $K^X\times K^Y=K^?$ $X\sqcup Y=\dots$?
$K^{(X)}\times K^{(Y)}$
$(K^{(X)}\times K^Y)$

---

② Se V spazio vett su K, e $U\subseteq V$ sottoinsieme di V,
possiamo chiederci quando U stesso ha struttura di sp. vettoriale usando le OPERAZIONI di V?
Se sì si dice che U è SOTTO K-SPAZIO VETTOR. di V e si scrive $U\leq V$

CRITERIO DI SOTTOSPAZI:
$U\subseteq V$ (sottoinsieme) è SOTTOSPAZIO di V sse soddisfa alle seguenti condizioni:
(0) $U\neq\emptyset$
(1) $u_1,u_2\in U\Rightarrow u_1+u_2\in U$ — somma in V
(2) $\alpha\in K$, $u\in U\Rightarrow\alpha u\in U$ — prodotto × scalari in V

(U sottospazio sse $\neq\emptyset$, chiuso per + di V, chiuso per · di V)

dimostrazione: OVVIA
U sottosp. sse (0),(1),(2)
U sottosp. ⟹ (0)(1)(2)
U sottosp. ⟸ (0)(1)(2)
usiamo + di V "ristretto" a U
$V\times V\to V$ ⇝ $U\times U\xrightarrow{+}U$, $U\times U\to V$ (1)
$K\times V\to V$ ⇝ $K\times U\xrightarrow{\cdot}U$, $K\times U\to V$ (2)

ovvero: U è sottospazio di V sse (0') $0_V\in U$
(1') $u_1,u_2\in U$, $\alpha\in K$ ⟹ $\alpha u_1+u_2\in U$
(U sottospazio di V sse contiene 0_V, chiuso per combinazioni lineari di suoi elementi)

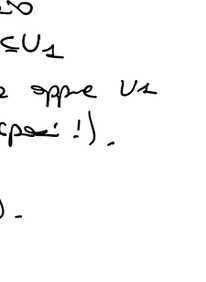
infatti: (0'),(1') ⟺ (0),(1),(2)
esercizio: (0),(1),(2) ⟹ (0'),(1')
e (0'),(1') ⟹ (0),(1),(2)
(nota (0') ⟹ (0) $\not\Leftarrow$ ...)

Esempio:
in K^2:
$U=\{\binom{x}{y}: x+y=0\}\subseteq K^2$, $\leq$
$\binom{0}{0}\in U$
$\binom{x}{y},\binom{x'}{y'}\in U\Rightarrow\binom{x+x'}{y+y'}\in U$; $x+y=0$, $x'+y'=0$
$\alpha\binom{x}{y}=\binom{\alpha x}{\alpha y}\in U$ ✓

$U=\{\binom{x}{y}: x+y=1\}\subseteq K^2$, $\not\leq K^2$ perché $\binom{0}{0}\notin U$

$U=\{\binom{x}{y}: x=0 \text{ oppure } y=0\}\subseteq K^2$, $\not\leq K^2$: vero che $\binom{0}{0}\in U$ però: $\binom{1}{0},\binom{0}{1}$ ma $\binom{1}{1}\notin U$

se V spazio vettoriale su K, allora:
$\mathcal{P}(V)=\{A\subseteq V\}$ PARTI DI V
∪|
$\mathbb{S}(V)=\{U\leq V\}$ SOTTOSPAZI DI V ?
(c'è l'ORDINE DI INCLUSIONE)
più piccolo sotto sp. vett è $\{0_V\}$ (il ∅ non è sp. vettoriale!)
più grande sottospazio è V stesso.



se U_1,U_2 sono sottospazi di V:
① $U_1\cap U_2$ come sottoinsieme di V, è anche un sottospazio di V?
(0') $0_V\in U_1$, $0_V\in U_2$ ⟹ $0_V\in U_1\cap U_2$ ✓
(1') $u\in U_1\cap U_2$, $v\in U_1,U_2$, $\alpha\in K$: $\alpha u+v\in U_1$ ($u\in U_1, v\in U_1, \alpha\in K$), $\in U_2$ ($u\in U_2, v\in U_2, \alpha\in K$) ⟹ $\alpha u+v\in U_1\cap U_2$ ✓
② $U_1\cup U_2$ come sottoinsieme di V, è anche sottospazio di V?
Non è detto, per esempio: K^2, $\binom{x}{0}$; K^2, $\binom{0}{y}$; unione non è sottospazio.

problema: $U_1\cup U_2$ è già sottospazio sse $U_1\subseteq U_2$ oppure $U_2\subseteq U_1$ (e allora $U_1\cup U_2=U_2$ oppure U_1 che sono sottospazi!).
(da mostrare: ⟹ "difficile", ⟸ facile).

NOTA: $U_1\cap U_2$ è il più grande sottoinsieme contenuto sia in U_1 sia in U_2
$U_1\cap U_2$ come sottospazio come il più grande sottospazio contenuto in entrambi U_1,U_2 (e in effetti è l'insieme INTERSEZIONE)

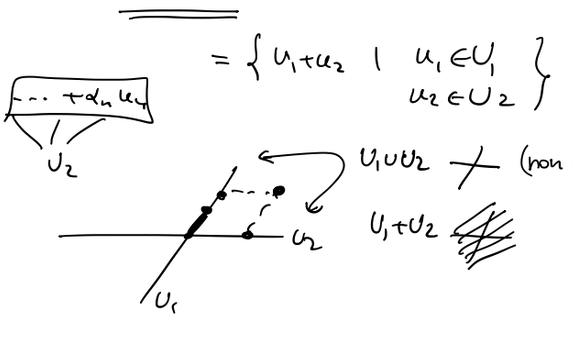
NOTA: $U_1\cup U_2$ è il più piccolo sottoinsieme di V che contiene sia U_1 sia U_2
ora $U_1\cup U_2$ di solito non è sottospazio, quindi possiamo chiederci:
ESISTE il più piccolo SOTTOSPAZIO CHE contiene sia U_1 sia U_2? (se esiste certamente contiene $U_1\cup U_2$)
Si chiama U_1+U_2

Risposta teorica:
$\boxed{\text{se } U_\alpha\leq V\ \forall\alpha\in A\ (A \text{ qualsiasi}) \text{ allora } \bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha \text{ è sottospazio di } V}$
intersezione di tutti U_α: $\{v\in V: v\in U_\alpha, \forall\alpha\in A\}$

Allora troviamo il più piccolo sottospazio che contiene U_1 e U_2 nel seguente modo:
U_1+U_2 := intersezione di TUTTI i SOTTOSPAZI che contengono sia U_1 sia U_2 (ce ne sono, per es. V stesso)

Risposta "pratica":
Definizione: se $v_1,\dots,v_n\in V$ e $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ allora $\sum\alpha_iv_i=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n\in V$ si dice "combinazione lineare (finita) (dei vettori v_i con coeff α_i)"

allora
$U_1+U_2=\{$insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di $U_1\cup U_2\}$
$=\{\alpha_1u_1+\alpha_2u_2 : \alpha_1,\alpha_2\in K, u_1\in U_1, u_2\in U_2\}$
$=\{u_1+u_2 \mid u_1\in U_1, u_2\in U_2\}$
$(\alpha_1u_1+\alpha_1'u_1')+(\dots+\alpha_nu_n)$: U_1, U_2



$\boxed{\text{Dato } S\subseteq V \text{ chi è il più piccolo sottospazio che} \supseteq S?}$
$<S>\ \leq V$
‖ tutte le comb. lin. finite di S
e allora: $\boxed{U_1+U_2=<U_1\cup U_2>}$
settimana prossima!
note!

19/10/2022

Riassunto: spazi vettoriali (su campo K), combinazioni lineari finite di vettori:
$v_1,\dots,v_n\in V$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$:
$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=\sum_i\alpha_iv_i\in V$
note: $F=\{1,\dots,n\}$: $\sum_{i\in F}\alpha_iv_i\in V$
$\boxed{\text{e se } F=\emptyset,\ \sum_\emptyset:=0_V}$
$\sum_F=\sum_{F\cup\emptyset}=\sum_F+\sum_\emptyset$

Sottosp: $U\subseteq V$ è sottospazio: se U stesso con le op. di V è sp.vett.
(criteri) sse: $U\neq\emptyset$, chiuso per +, chiuso per · ($u,u_1\in U\Rightarrow u+u_1\in U$) ($u\in U,\alpha\in K\Rightarrow\alpha u\in U$)
sse: $\ni 0_V$, chiuso per comb. lin. $\alpha u+u'$ se $\alpha\in K$, $u,u'\in U$
sse: CHIUSO PER COMB. LIN. FINITE ≡ "u_i con $i\in F$ insieme finito, $u_i\in U$, $\alpha_i\in K$ ⟹ $\sum_F\alpha_iu_i\in U$"

$\mathbb{S}(V)=\{\text{sottospazi di }V\}\subseteq\mathcal{P}(V)=\{\text{sottoinsiemi di }V\}$; $\cap,\cup,\subseteq$ ordine
ⓘ?
INTERSEZIONE (insiemistica) ARBITRARIA DI SOTTOSPAZI è SOTTOSPAZIO:
se $U_\alpha\leq V$ con $\alpha\in A$ allora $\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha\leq V$
per uno qualsiasi dei criteri:
($u_i\in\bigcap U_\alpha$, $\lambda_i\in K$ (quasi tutti nulli) $i=1,\dots,n$, vogliamo vedere che $\sum_i\lambda_iu_i\in\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha$)
$u_i\in U_\alpha$ $\forall\alpha\in A$ ⇓ (U_α sottosp.) $\sum\lambda_iu_i\in U_\alpha$ $\forall\alpha$

Invece l'unione di sottospazi di solito NON è sottospazio:
K^2: $U_1=\{\binom{x}{0} \mid x\in K\}$, $U_2=\{\binom{0}{y} \mid y\in K\}$
$U_1\cup U_2$ non è sottospazio
contiene $\binom{1}{0},\binom{0}{1}$
ma $\binom{1}{0}+\binom{0}{1}=\binom{1}{1}\notin U_1\cup U_2$

Quindi DEFINIAMO
U_1+U_2 := il più piccolo SOTTOSPAZIO che contiene U_1 e U_2,
$\boxed{= \text{il più piccolo SOTTOSPAZIO che contiene } U_1\cup U_2}$ DEF.
(questione insiemistica) $\boxed{= \text{l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono } U_1\cup U_2}$
(dai criteri) $\boxed{= \text{l'insieme di TUTTE le combinazioni lineari finite di vettori di } U_1 \text{ e } U_2.}$

$\mathbb{S}(V)$ = sottospazi di V ⊆ $\mathcal{P}(V)$
$\cap,+,\leq$ — $\cap,\cup,\subseteq$
PROPRIETÀ?
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
RETICOLO DISTRIBUTIVO
$\boxed{\mathbb{S}(V)\xleftarrow{?}\mathcal{P}(V)}$

dato $S\subseteq V$ SOTTOINSIEME QUALSIASI DI V, definiamo: ("sotto-K-spazio vettoriale")
$<S>$ SOTTOSPAZIO GENERATO DA S :=
def | ≡ PIÙ PICCOLO SOTTOSPAZIO DI V che contiene S — $<S>$
costr. teorica | = INTERSEZIONE DI TUTTI I SOTTOSPAZI che contengono S $=\bigcap_{U\leq V, U\supseteq S}U$ — $I(S)$
costr. pratica | = insieme di tutte le combinazioni lineari finite di vettori di S $=\{\sum_{i\in F}\lambda_is_i \mid \lambda_i\in K, s_i\in S, F \text{ insieme finito}\}$ — $L(S)$

Vediamo le uguaglianze.
• $<S>=I(S)$ perché:
$<S>\subseteq I(S)$: essendo $<S>$ più piccolo sottospazio che contiene S, per ogni $U\leq V$, $U\supseteq S$ abbiamo $U\supseteq<S>$, quindi $I(S)=\bigcap_{S\subseteq U\leq V}U\supseteq<S>$
$<S>\supseteq I(S)$: $I(S)$ = intersezione di sottospazi, quindi è sottospazio e contiene S, d'altra parte $<S>$ stesso ha le proprietà di contenere S, quindi è uno della $\bigcap_{S\subseteq U\leq V}U$, dunque $I(S)\subseteq<S>$.
• $<S>=L(S)$ perché:
$<S>\supseteq L(S)$ perché $<S>\supseteq S$ ed è sottospazio, quindi deve contenere tutte le combinazioni lineari finite di elementi di S, quindi contiene $L(S)$
$<S>\subseteq L(S)$ basta mostrare che $L(S)$ è sottospazio.

Nota: $U_1+U_2=<U_1\cup U_2>$
"il più piccolo sottospazio che contiene U"
"il sottospazio generato dall'unione."
esempio: $U_2=<\binom{0}{1}>=\dots$
$U_1=<\binom{1}{1}>=\{\alpha\binom{1}{1}: \alpha\in K\}=\{\binom{\alpha}{\alpha} \mid \alpha\in K\}$
$U_1+U_2=\{\alpha\binom{1}{1}+\beta\binom{0}{1}=\binom{\alpha}{\alpha+\beta}\ \dots\}=K^2$
$<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}>+<\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}>=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}>$
$=$ piano $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$
$=$ piano "$x_3=0$"

Proprietà di $<->$: $\mathcal{P}(V)\longrightarrow\mathbb{S}(V)$, $\emptyset\longrightarrow<0_V>=0_V$
① $<\emptyset>=\{0_V\}$
$<\{0_V\}>=\{0_V\}$
② $S\subseteq<S>$ e vale = sse S è già sottospazio vettoriale
(⟹ ovvio: se sono uguali $S=<S>$ che è sottospazio!
⟸ facile: se S è sottospazio, lui è il più piccolo sottospazio che lo contiene!)
②' $S\subseteq T$ ⟹ $<S>\subseteq<T>$
$<<S>>=<S>$
③ $\boxed{<S_1\cap S_2>\ \subseteq\ <S_1>\cap<S_2>}$ di solito sono ≠
($S_1\cap S_2\subseteq S_1, \subseteq S_2$; $<S_1\cap S_2>\subseteq<S_1>, \subseteq<S_2>$)
esempio: $S_1=\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}$, $<S_1>=K^2$; $S_2=\{\binom{1}{0},\binom{0}{-1}\}$, $<S_2>=K^2$; $<S_1>\cap<S_2>=K^2$
$S_1\cap S_2=\{\binom{1}{0}\}$, $<S_1\cap S_2>=<\binom{1}{0}>$
④ $\boxed{<S_1\cup S_2>}\ \supseteq\neq\ \boxed{<S_1>\cup<S_2>}$; $\boxed{<S_1>+<S_2> = <<S_1>\cup<S_2>>}$ $=<S_1\cup S_2>$ (sono sottospazi!)
di solito sono ≠; esempio: ESERCIZIO.
($S_1\cup S_2\supseteq S_1, \supseteq S_2$; $<S_1\cup S_2>\supseteq<S_1>, <S_2>$, $\supseteq<S_1>+<S_2>$)

Reticolo è insieme ORDINATO $(A,\leq)$ (RELAZIONE $\leq$ RIFLESSIVA $a\leq a$, ANTISIMM. $a\leq b, b\leq a\Rightarrow a=b$, TRANSITIVA $a\leq b, b\leq c\Rightarrow a\leq c$)
tale che: abbia infimo, supremo
abbia 2 operazioni binarie
inf $a\wedge b$ = più grande $\leq a, \leq b$
sup $a\vee b$ = più piccolo $\geq a, \geq b$
(RIFLESSIVE, SIMMETRICHE, ASSOCIATIVE)
e si dice distributivo se
$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$\mathcal{P}(X)$ è RETICOLO DISTRIBUTIVO per $\subseteq,\cap,\cup$
con infimo ∅,
con supremo X.

$\mathbb{S}(V)=\{\text{sottospazi di }V\}$
con $\leq$ inclusione di sottospazi
$\cap$ come inf
$+$ come sup
è RETICOLO con infimo $<\emptyset>=\{0_V\}$, supremo $=V$
che però non è distributivo:

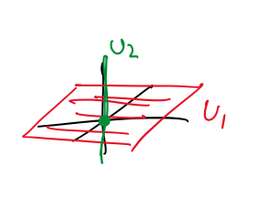
$\boxed{U_1\cap(U_2+U_3)\ \supseteq\ (U_1\cap U_2)+(U_1\cap U_3)}$ ($U_1\cap U_2\leq U_1\cap(U_2+U_3)$, $U_1\cap U_3\leq U_1\cap(U_2+U_3)$)
sono sottospazi $\leq U_1\cap(U_2+U_3)$ dunque la loro + è sottospazio di

$\boxed{U_1+(U_2\cap U_3)\ \leq\ (U_1+U_2)\cap(U_1+U_3)}$ ($U_2\cap U_3\leq U_2, U_3$; $\leq U_1+U_2$, U_1+U_3)

controesempio a queste =, cioè un caso con $\lneq$: ESERCIZIO! funziona lo stesso di prima!
$<\binom{0}{1}>=U_3$, $U_1=<\binom{1}{1}>$, $U_2=<\binom{1}{0}>$
$U_1\cap U_2=<0>$, $U_1\cap U_3=<0>$ } + è $<0>$ ≠
$U_1=<\binom{1}{1}>$, $U_2+U_3=K^2$ } ∩ è $<\binom{1}{1}>$

DEFINIZIONE:
se V è K-spazio vettoriale,
$U_1,U_2\leq V$ sotto K-spazi di V
si dicono COMPLEMENTARI se
$\begin{cases}U_1\cap U_2=<0_V>\\U_1+U_2=V\end{cases}$
e si scrive $V=U_1\oplus U_2$

esempio: in K^2, $U_1=<\binom{1}{0}>$, $U_2=<\binom{0}{1}>$ allora $K^2=U_1\oplus U_2$
in K^3: $U_1=<\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}>$ e $U_2=<\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}>$ allora $K^3=U_1\oplus U_2$



Nota: fissato $U\leq V$ ci sono TANTI W tali che $U\oplus W=V$
cioè $\begin{cases}U+W=V\\U\cap W=<0_V>\end{cases}$
per esempio: in K^2, $U=<\binom{1}{0}>$ allora qualsiasi $<\binom{x_0}{y_0}>$ con $y_0\neq0$ è spazio complementare con U.

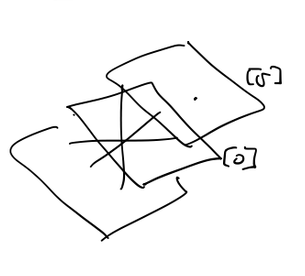
Quozienti di spazi vettoriali:
V spazio vettoriale,
$U\leq V$ sottospazio di V
definiamo
$v,w\in V$: $v\sim_Uw$ sse $v-w\in U$

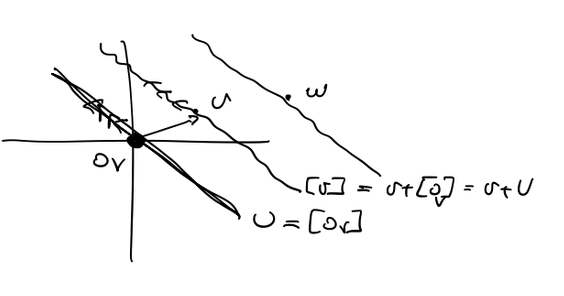
questa $\sim$ è relazione di equivalenza:
riflessiva: $v\sim v$ (perché $v-v=0_V\in U$)
simmetrica: $v\sim w$ ($v-w\in U$ ⟹ $w-v\in U$) ⟹ $w\sim v$
transitiva: $v\sim w$, $w\sim w'$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $v\sim w'$
($v-w\in U$, $w'-w\in U$; $(v-w)-(w'-w)\in U$; $v-w'\in U$)

classi di equivalenza:
$\forall v\in V$ $[v]_U=\{w\in V: w\sim v\}$ $=\{v+u : u\in U\}=v+U$
($w=v+u$ (con $u\in U$), $w-v=u\in U$)

insieme quoziente
$V/\sim\ \equiv V/U=\{[v]_U : v\in V\}$
insieme delle classi di equivalenza.

Per l'immaginazione





E l'insieme V/U è esso stesso uno spazio vettoriale con le seguenti operazioni:
$\boxed{[v]+[v']:=[v+v']}$
$\boxed{\alpha[v]:=[\alpha v]}$
che sono BEN DEFINITE, (cioè l'operazione che definiamo dipende solo dalla classe $[v]$ e non dal rappresentante scelto $v\in V$.)
cioè se $v\sim w$, $v'\sim w'$ allora $[v]+[v']=[w]+[w']$
se $\alpha\in K$, $v\sim w$ ($[v]=[w]$) allora $\alpha[v]=\alpha[w]$.

infatti, vediamo la prima per esempio:
$[v]=[w]$, $[v']=[w']$ ≡ $v\sim w$, $v'\sim w'$ ⟹ $w-v\in U$, $w'-v'\in U$ ⟹ $(w+w')-(v+v')=(w-v)+(w'-v')\in U$ ($\in U$, $\in U$)
⇓ $[v+v']=[w+w']$
⇓ $[v]+[v']=[w]+[w']$ //
voglio vedere: $[v+v']=[w+w']$

24/10/2022