Applicazioni lineari tra spazi vettoriali:

- Definizione e caratterizzazione, fatti complementari
- Nucleo, immagine e formula della dimensione
- Agli lineari, isomorfismi, biiettività (iniettività, suriettività) e automorfismi.
- Studio di sottospazi di $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ studio di $\mathrm{End}_K(V)$ e $\mathrm{Aut}_K(V)$ (anche tipo per composizione)
- Esempi: $\mathbb{R}_n$, integrazione e derivazione, proiezioni e simmetrie...

(AD1A cl. II, ma 5)

Idea di base:

dati due insiemi con struttura algebrica/analitica

la prima cosa che si impostate sono le funzioni che rispettano quella struttura.

GRUPPI $\longrightarrow$ OMOMORFISMI e ISOMORFISMI

INSIEMI $\longrightarrow$ funzioni

Ed effettivamente $\longrightarrow$ FUNZIONI e ISOMORFISMI (lineari)

$(V,+,\cdot)$ spazio $\longrightarrow$ LINEARI

$\mathbb{R}^n = V_n(\mathbb{R})$ $\quad$ matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Definizione: V, W spazi vettoriali su K (stesso campo)

una funzione $\varphi: V \longrightarrow W$ si dice LINEARE o di Grassmann o lineare su K se soddisfa le proprietà 2 caratteristiche:

(1) $\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v')$ $\quad \forall v, v' \in V$
$\qquad$ $+_V$ $\qquad$ $+_W$

(2) $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$ $\quad \forall \alpha \in K, v \in V$
$\qquad$ $\cdot_K$ $\qquad$ $\cdot_V$ $\qquad$ $\cdot_W$
$\qquad$ prodotto per scalare

Quindi due proprietà sono equivalenti a chiedere quanto segue che chiamiamo

(1) $\varphi(\alpha v + v') = \alpha\varphi(v) + \varphi(v')$ $\quad \forall \alpha \in K, v, v' \in V$

infatti (1),(2) $\Rightarrow$ (1) $\quad \varphi(\alpha v + v') \overset{(1)}{=} \varphi(\alpha v) + \varphi(v') \overset{(2)}{=} \alpha\varphi(v) + \varphi(v')$

(1) $\Rightarrow$ (2),(1) $\quad$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\quad$ $\varphi(\alpha v) = \varphi(\alpha v + 0) = \alpha\varphi(v) + \varphi(0) = \alpha\varphi(v) + \varphi(0+0) = \alpha\varphi(v) + \varphi(0) + \varphi(0) = \alpha\varphi(v) + \varphi(0)$

(1) $\Rightarrow$ (1) $\quad \varphi(0) = 0$

Una applicazione lineare si chiama anche omomorfismo (di gruppi) o morfismo (di anelli) o morfismo (di moduli) o morfismo (di algebre) o morfismo (di spazi vettoriali) o morfismo (di campi) o morfismo (di corpi) o morfismo (di spazi affini) o morfismo (di spazi proiettivi) o morfismo (di spazi affini) o morfismo (di spazi proiettivi) o morfismo (di spazi affini) o morfismo (di spazi proiettiv