Diagramma APPLICAZIONI - MATRICI:

(1) ogni lin associata a matrice
composizione $\leftrightarrow$ prodotto riga x colonna

(2) matrici associate ad applicazioni lineari (scelte basi)
cambiamento di base

(3) Struttura di K algebra delle matrici quadrate
matrici invertibili da/su
non invertibili
matrici notevoli: scalari, diagonali, triangolari
nilpotenti, unipotenti,
blocchi
matrici elementari e opp. pivots

((Note, op II, ex 2.3))

Riassunto:

$M_{n,m}(K) \longrightarrow Hom_K(K^m, K^n)$

$A = (a_{ij}) \longmapsto \varphi_A : K^m \to K^n$
tale che
$\varphi_A(X) = A\,X$

Significa "prodotto riga per colonne":

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ \sum a_{nj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m$$

X_1 X_2 X_m

"combinazione lineare delle colonne di A con coeff x^i"

in modo equivalente: φ_A è l'unica funzione tale che $\varphi_A(e_i) =$ i' prima colonna A

infatti: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ e_2 prima colonna A

Nota: allora che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A\,(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m)$
$= x_1 Ae_1 + x_2 Ae_2 + \cdots + x_m Ae_m$
$= x_1\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} + \cdots + x_m\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$
colonna 1 A

$e_1 \mapsto$ prima colonna
$e_2 \mapsto$ seconda $\cdots$
$e_m \mapsto$ m-esima $\cdots$ $\in K^m$
$K^m \longrightarrow K^n$

Sia A matrice quadrata t.c. $A^2 = A$
mostra che esiste una matrice invertibile H tale che
$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
dove il numero di 1 è il rango di A.

Stesso problema: sia $T: V \to V$ con $T^2 = T$,
costruire di esiste una base di V tale che
$\alpha_V(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Scrivere lo stesso problema con le simmetrie
(matrici A con $A^2 = 1_n$, funzioni θ con $\theta^2 = id_V$).

Quali sono le matrici che elevate alla seconda danno l'elemento neutro?

Esse cercano $X \in M_n(K)$ t.c. $X^2 = 1_n$.

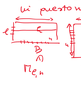
Quali sono le matrici che elevate alla seconda danno la matrice nulla?

Esse cercano $X \in M_n(K)$ t.c. $X^2 = 0_n$

$K^m \xrightarrow{\varphi_A} K^n \xrightarrow{\varphi_B} K^k$
$A \in M_{n,m}(K)$ $\quad B \in M_{k,n}(K)$
$\varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_C$? $\quad C \in M_{k,m}(K)$

$X \mapsto AX$
$Y \mapsto BY$
$X \longmapsto B(AX) = CX$
?

vero e la matrice C si trova facendo un prodotto di B e A
in questo modo:



$= C_{ik}$

$\Pi_{C_{ik}}$ $\quad A \in M_{n,m}$ $\quad C_{ik}$

prodotto riga i-esima B con colonna k-esima A

Conclusione: la composizione di funzioni lineari corrisponde a un "prodotto di matrici" che si può fare tra due matrici tali che
colonne prima = # righe seconda
e si fa "riga x colonna".

B · A $\longleftrightarrow$ $K^k \to K^n \to K^e$
φ_A φ_B
$\varphi_B \circ \varphi_A$

- $= (a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \square = \sum a_i x_i$

  Nota: spesso useremo questa notazione
  una riga vista da una base di V:
  $(v_1, v_2, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum x_i v_i \in V$
  tutti V

- $=$

$(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m) = \begin{pmatrix} x_1\beta_1 & x_1\beta_2 & \cdots & x_1\beta_m \\ x_2\beta_1 & x_2\beta_2 & \cdots & x_2\beta_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

- $=$

   $= \square$

- $= \square$

- $AB \neq BA$

  una anche se fossero n x n
  $\boxed{B}\boxed{A} \neq \boxed{A}\boxed{B}$

Nota: il prodotto di matrici corrisponde alla operazione di composizione di funzioni lineari, quindi ha le stesse proprietà:

per esempio:

$AB \neq BA \quad \longleftrightarrow \quad \varphi_A \circ \varphi_B \neq \varphi_B \circ \varphi_A$

$(AB)C = A(BC) \quad \longleftrightarrow \quad (\varphi_A \circ \varphi_B) \circ \varphi_C = \varphi_A \circ (\varphi_B \circ \varphi_C)$

$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = 1_n \quad \longleftrightarrow \quad \exists\, id_{K^n} : K^n \to K^n$

$A\,1_n = 1_n A = A \;\; \forall A \quad \longleftrightarrow \quad \varphi \circ id = id \circ \varphi = \varphi \;\; \forall \varphi$

$A \in M_n(K)$, $\exists\, B \in M_n(K) : AB = 1_n = BA$ $\quad \longleftrightarrow \quad$ domanda: dato $\varphi : V \to V$, $\exists\, \psi : \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = id_V$?

se rango di $A = n$ (massimo)

sse φ iniettiva
sse $\operatorname{Im}\varphi = \mathcal{C}\varphi$
sse $\operatorname{Im}\varphi = V$

Definizione

dell'insieme $Hom_K(K^m, K^n)$
è SPAZIO VETTORIALE $+, \cdot$

$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$
$(\alpha\varphi)(v) = \alpha \cdot \varphi(v)$

se $n = m$ $\quad \boxed{Hom_K(K^m, K^m) = End_K(K^m)}$

allora ci è $+, \cdot$, e c'è la composizione di funzioni $\psi \circ \varphi$ se $K^m \xrightarrow{\varphi} K^m \xrightarrow{\psi} K^m$

è K spazio vettoriale con $+, \cdot$
è anello con $+, \circ$
(id$_{K^m}$ è identità per $\circ$,
$(\varphi \circ \psi) \circ \chi = \varphi \circ (\psi \circ \chi)$ ASSOCIATIVA,
$\begin{cases} (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \psi = \varphi_1 \circ \psi + \varphi_2 \circ \psi \;\; ? \\ \varphi \circ (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \circ \psi_1 + \varphi \circ \psi_2 \end{cases}$
$\begin{cases} (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \circ \psi = \alpha_1\varphi_1 \circ \psi + \alpha_2\varphi_2 \circ \psi \\ \varphi \circ (\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2) = \beta_1\varphi \circ \psi_1 + \beta_2\varphi \circ \psi_2 \end{cases}$

$(\varphi_1 + \varphi_2) \circ \psi \;(v)$
$(\varphi_1 + \varphi_2)(\psi(v))$
$\varphi_1(\psi(v)) + \varphi_2(\psi(v))$
$(\varphi_1 \circ \psi + \varphi_2 \circ \psi)(v)$

proprietà di DISTRIBUTIVITÀ

$End_K(K^m) = Hom_K(K^m, K^m)$ è K-algebra

cioè: è K spazio vettoriale con $+, \cdot$,
è anello con $+, \circ$
e il prodotto "anelli" è compatibile con la struttura di spazio:
BILINEARE: $(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \circ \psi = \alpha_1\varphi_1 \circ \psi + \alpha_2\varphi_2 \circ \psi$
$\varphi \circ (\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2) = \beta_1\varphi \circ \psi_1 + \beta_2\varphi \circ \psi_2$

Dimensione dei spazi di matrici quadrate

$M_n(K) = M_{n,n}(K)$

sono K algebre

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$\alpha A = (\alpha a_{ij})$

$AB = (c_{ij})$ $\quad c_{ij}$ = prodotto riga i di A con colonna j di B

cioè è K spazio vett:

$+$: $A + B = B + A$
$(A + B) + C = A + (B + C)$
$\exists\, 0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ t.c. $0_n + A = A + 0_n \;(\forall A)$
$\forall A, \exists\, -A$ t.c. $A + (-A) = 0 = (-A) + A$

$\cdot$: $1 \cdot A = A \quad \forall A$
$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

poi è anche: $\times$ (stesse sei righe!)

- $A(BC) = (AB)C$
  $\exists\, 1_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ t.c. $A\,1_n = A = 1_n A$
  $A(B + C) = AB + AC$
  $(A + B)C = AC + BC$

Nota:

$M_{n,m}(K) \xrightarrow{\cong} Hom_K(K^m, K^n)$
$A \longmapsto \varphi_A$

matrice?

dato $\varphi : K^m \to K^n$ lineare, c'è vero che si trova una matrice A tale che φ sia la funzione corrispondente

codominio da matrice
di cui colonne sono
$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_m) \in K^n$

$\begin{pmatrix} | & | & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = A \in M_{n,m}(K)$

è isomorfismo di K-algebre se $n = m$
quindi di K spazi vettoriali sempre

Modo: $\dim_K(Hom_K(K^m, K^n)) = \dim_K(M_{n,m}(K)) = n \cdot m$.

Problema: trovare una base per $Hom_K(K^m, K^n)$
{ prendere la base canonica di $M_{n,m}(K)$
e vedere che funzioni danno $K^m \to K^n$?

Attenzione:

$M_n(K) \cong End_K(K^n)$ è K-algebra,
ma se guardiamo SOLO le funzioni invertibili (bigettive):

$GL_n(K) = Aut_K(K^n)$ è SOLO UN GRUPPO NON COMMUTATIVO per $n > 0$ (POSSIBILE)
gruppo GENERALE LINEARE (ordine n)

NON C'È più la somma!
perché somma di funzioni invertibili può non essere invertibile!

Esempi:

$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}}$

$(\alpha\beta)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
$(\alpha a + \beta d \quad \alpha b + \beta e \quad \alpha c + \beta f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cdots$

$K^2 = \{e_1, e_2\}$ vero

$\neq 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è funzione: $\begin{cases} e_1 \mapsto e_1 \\ e_2 \mapsto e_2 \\ e_3 \mapsto 0 \end{cases}$ $\quad$ iniezione? $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è funzione: $\quad$ suriettiva? $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

ecc.

Definizioni generali:

se V, W sono spazi vettoriali su K,
e $\varphi : V \to W$ è funzione lineare
allora:
scelte basi $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V $\quad (n = \dim_K(V))$
base $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ di W $\quad (m = \dim_K(W))$

(capiamo di) $\alpha_{\mathcal{V}} : V \to K^n$
$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tale che $\sum x_i v_i = v$
$\alpha_{\mathcal{V}}(v)$ $\quad v = (v_1, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\alpha_{\mathcal{W}} : W \to K^m$
$w \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ tale che $w = (w_1, \ldots, w_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

e alla funzione lineare φ possiamo associare in modo unico una MATRICE che DIPENDE dalle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$:

$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \in M_{\dim_K(W), \dim_K(V)}(K) = M_{m,n}(K)$

la cui COLONNE sono le COORDINATE nella base $\mathcal{W}$ dei vettori $\varphi(v_i)$
immagini trasformate φ dei vettori della base $\mathcal{V}$.

$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_1)) & \alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_2)) & \cdots & \alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_n)) \end{pmatrix}$ $\updownarrow n$
$\longleftrightarrow m$

(lo stesso di prima per $K^m \to K^n$,
solo che usiamo le basi canoniche!)

Questa matrice determina completamente la funzione lineare φ.

$\mathcal{V} = (v_1 \ldots v_n) \qquad \mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_m)$

$\varphi(v) = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) = (w_1, \ldots, w_m)\left(\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\right)$
$\varphi(v)$ $\qquad \sum w_i \alpha_{ij}(\varphi_{v_j})$

Come si calcola $\varphi(v)$ con $v \in V$ qualsiasi usando SOLO la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$?

$v = \sum x_i v_i$ con la base $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$
$= \mathcal{V}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{V} \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$

allora
$w \ni \varphi(v) = \varphi(\sum x_i v_i) = \sum x_i \varphi(v_i)$
$= \varphi(\mathcal{V}) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$
$= (\mathcal{W} \cdot \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$
$= (w_1, \ldots, w_n)\left(\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\,\alpha_{\mathcal{V}}(v)\right)$

$\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v)) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$
$\downarrow$
$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Modo: la coordinate nella base $\mathcal{W}$ del vettore $\varphi(v)$ con $v \in V$ sono date dal prodotto riga x colonna della matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ con $\alpha_{\mathcal{V}}(v)$
(coordinate di v nella base $\mathcal{V}$ di V).

$V \xrightarrow{\varphi} W$
$v_1, \ldots v_n = \mathcal{V}$ base V $\qquad w_1, \ldots w_m = \mathcal{W}$ base W

qui siamo $v \in V$
si scrive $v = \mathcal{V}X$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{V}}(v)$

$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \left(\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_1)) \cdots \alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_n))\right)$

cioè $\varphi(\mathcal{V}) = \mathcal{W} \cdot \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ $\qquad (\varphi(v_1) \ldots \varphi(v_n)) = (w_1, \ldots w_n)\left(\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi)\right)$

$\varphi(v) = \varphi(\mathcal{V}X) = \varphi(\mathcal{V}) \cdot X$
$= \mathcal{W} \cdot \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot X$
$= \mathcal{W} \cdot \alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v))$

$\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi)$
matrice tale che:

$(w_1 \cdots w_n)\,\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$
$\parallel$
$(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$

$(w_1, \ldots w_n)\,\boxed{\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)} = (\varphi(v_1) \ldots \varphi(v_n))$

$\varphi(v_i)$ si ottiene moltiplicando la base $\mathcal{W}$ per matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ colonna i.

$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$
$\parallel$
$\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v))$

$\varphi(X) = AX$

$\varphi(X)$ si ottiene moltiplicando $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ per coordinate X

$\varphi(v) = \mathcal{W} \cdot \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ $\longleftrightarrow$ $\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v)) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$

$(\varphi(v_1) \ldots \varphi(v_n))$ $\quad (w_1, \ldots w_m)\left(\alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_1)) \cdots \alpha_{\mathcal{W}}(\varphi(v_n))\right)$ $\quad v \in V$
$(v_1, \ldots v_n)$ base V $\qquad$ base W $\qquad \varphi(v) = \varphi(\mathcal{V}\alpha_{\mathcal{V}}(v))$
$= \varphi(\mathcal{V}) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v) = \mathcal{W} \cdot \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) \cdot \alpha_{\mathcal{V}}(v)$

$V \xrightarrow{\varphi} W$
$\mathcal{V}$ $\qquad \mathcal{W}$ $\qquad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$
$id_V \downarrow \qquad \downarrow id_W$
$V \xrightarrow{\varphi} W$
$\mathcal{V}'$ $\qquad \mathcal{W}'$ $\qquad \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi)$

$id_W \circ \varphi \circ id_V = \varphi$

$\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(id_W \circ \varphi \circ id_V) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi)$

$\underbrace{\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(id_W)}\,\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\,\underbrace{\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id_V)}$

sono matrici INVERTIBILI,
si chiamano "MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE".

Stiamo usando: "prodotto di matrici = composizione di funzioni (nelle basi date)"

$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U$
$\mathcal{V} \qquad \mathcal{W} \qquad \mathcal{U}$
$\psi \circ \varphi$

$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\psi \circ \varphi) = \underbrace{\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\psi)}_{\text{stesse basi}}\,\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$

stessi conti di prima con spazi generalizzati

22/11/2022

---

se $A, B \in M_{n,m}(K)$
e $B = HAK$ con H, K matrici invertibili,
allora (e solo allora)
A e B rappresentano la stessa funzione lineare in basi diverse

se poi $V = W$, usiamo stesse basi in dominio e codominio di φ:

$V \xrightarrow{\varphi} V$
$\mathcal{V} \qquad \mathcal{V}$
$id \downarrow \qquad \downarrow id$
$V \xrightarrow{\varphi} V$
$\mathcal{V}' \qquad \mathcal{V}'$

$\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(\varphi) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id) \cdot \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) \cdot \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id)$
$\parallel \qquad \parallel \qquad \parallel$
$\alpha_{\mathcal{V}'}(\varphi) \qquad \alpha_{\mathcal{V}}(\varphi) \qquad H^{-1}$
$\parallel \qquad \parallel$
$B \qquad A$

$\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(id) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(id) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'}(id)$
$V \xrightarrow{id} V \qquad V \xrightarrow{id} V \qquad V \xrightarrow{id} V$
$\mathcal{V}' \quad H \quad \mathcal{V} \qquad \mathcal{V} \quad K \quad \mathcal{V}' \qquad \mathcal{V}' \quad \mathcal{V}'$
$\parallel \qquad \parallel \qquad \parallel$
$H^{-1} \qquad K \qquad \mathrm{Id}_{\mathcal{V}'}$