Geo1-22/3-33-AppLin-3

giovedì 10 novembre 2022 11:40

Tre teoremi di isomorfismo

Teoria della Dualità per sp. vettoriali.

● Esercizio di ripasso: in K^4 scegliere due sottospazi $U,V\le K^4$ di dimensione 2 in somma diretta:

$K^4 = U\oplus V$ $\quad U=\langle u_1,u_2\rangle$ u_1,u_2 base di U

$V:\begin{cases} a_1X=0\\ a_2X=0\end{cases}$ equazioni cartesiane di V

(a_1 riga: $(a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$ idem per a_2)

Usando solo questi dati scrivere le matrici di proiezioni e simmetrie associate a U e V.

(PROVARE ANCHE CON DEI NUMERI!)

●● Dati V,W spazi vettoriali su K, e sottospazi $U\le V$, $\mathcal{W}\le W$:

è vero che $V\times W/_{U\times\mathcal W}$ è isomorfo a $V/_U\times W/_{\mathcal W}$?

Cosa possiamo dire di $(U\times\mathcal W)^*$ e $\left(V\times W/_{U\times\mathcal W}\right)^*$?

∴ date due funzioni lineari $V\xrightarrow{\varphi}U$, $W\xrightarrow{\psi}U$ possiamo costruire una funzione $(\varphi,\psi): V\times W\longrightarrow U$ data da $(\varphi,\psi)(v,w):=\varphi(v)-\psi(w)$

descrivere: $\ker(\varphi,\psi)$, $(\varphi,\psi)^*$, $\ker((\varphi,\psi)^*)$

∴ Altro esercizio di riassunto:

Siano V,W spazi vettoriali su K, consideriamo il prodotto $V\times W$ e le 4 funzioni naturali

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_V"] & V\times W \arrow[r, "\pi_V"] \arrow[dr, "\pi_W"'] & V \\ W \arrow[ur, "i_W"'] & & W \end{tikzcd}$$

dove $i_V(v)=(v,0)$, $i_W(w)=(0,w)$, $\pi_V(v,w)=v$, $\pi_W(v,w)=w$

calcolare le composizioni possibili.

VICEVERSA: se uno spazio vettoriale P ha 4 funzioni lineari

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & V \\ W \arrow[ur, "j"'] & & W \end{tikzcd}$$

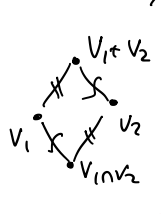
tali che $\pi\circ i=id_V$, $\pi\circ j=0$, $\sigma\circ i=0$, $\sigma\circ j=id_W$

allora esiste un unico isomorfismo tra P e $V\times W$ tale che....

TEOREMI DI ISOMORFISMO: SPAZI DI DIM. FINITA

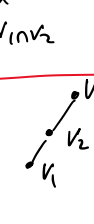
① $\varphi: V\to W \Rightarrow V/_{\ker\varphi}\cong im(\varphi)$ $\quad$ ($\Rightarrow \dim im\varphi = \dim V/_{\ker\varphi} = \dim V-\dim\ker\varphi$)

② $V_1,V_2\ (\le V)$



$\Rightarrow \dfrac{V_1+V_2}{V_1}\cong \dfrac{V_2}{V_1\cap V_2}$ $\quad$ ($\Rightarrow \dim\dfrac{V_1+V_2}{V_1} = \dim \dfrac{V_2}{V_1\cap V_2}$; $\dim(V_1+V_2)-\dim V_1$ $\quad$ $\dim V_2-\dim V_1\cap V_2$)

③ $\boxed{V_1\le V_2\le V_3\ (\le V)}$



$\dfrac{V_3/V_1}{V_2/V_1}\cong V_3/V_2$ $\quad$ (?)

PRIMO TEO ISO:

$\varphi: V\longrightarrow W$ esiste un unico isomorfismo $\bar\varphi: V/_{\ker\varphi}\longrightarrow im\varphi$ tale che:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & W \\ V/_{\ker\varphi} \arrow[r, "\bar\varphi"] & im(\varphi) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

cioè $\boxed{\varphi = i\circ\bar\varphi\circ\pi}$

in particolare ogni φ lineare si decompone come composizione di: proiezione, isomorfismo, inclusione

dimostrazione:

(1) definiamo $\boxed{\bar\varphi: V/_{\ker\varphi}\longrightarrow im\varphi}$ tramite: $\bar\varphi([v]):=\varphi(v)$ $\quad$ $[v]\in V/_{\ker\varphi}$, $v+(\ker\varphi)$

buona definizione: se v,v' con $[v]=[v']$ allora dobbiamo mostrare che $\bar\varphi([v])=\bar\varphi([v'])$

$[v]=[v'] \Leftrightarrow v-v'\in\ker\varphi$

$\Leftrightarrow v-v'=w\in\ker\varphi$

$\Leftrightarrow v=v'+w$

$\Rightarrow \varphi(v)=\varphi(v'+w)=\varphi(v')+~~\varphi(w)~~$; $\quad \varphi(v)=\bar\varphi([v])$, $\varphi(v')=\bar\varphi([v'])$ //

(2) e notiamo subito: $v\overset{\pi}{\longmapsto}[v]\overset{\bar\varphi}{\longmapsto}\bar\varphi([v])=\varphi(v)$

dunque abbiamo per costruzione il diagramma commutativo.

(3) mostriamo che $\bar\varphi: V/_{\ker\varphi}\to im\varphi$ è un isomorfismo

((lineare $\bar\varphi(\alpha[v]+[v'])=\bar\varphi([\alpha v+v'])$
$=\varphi(\alpha v+v')$
$=\alpha\varphi(v)+\varphi(v')$
$=\alpha\bar\varphi([v])+\bar\varphi([v'])$))

SURIETTIVA: per costruzione: ho messo $im(\varphi)$

INIETTIVA: o si fa usando la formula delle dimensioni per $\bar\varphi$: $\bar\varphi: \underline{V/_{\ker}}\longrightarrow im\varphi$

$\dim(V/_{\ker\varphi})=\dim V-\dim\ker\varphi = \dim im\varphi = \dim$ codominio

allora $\dim(\ker\bar\varphi)=0$.

oppure si fa direttamente:

$\ker(\bar\varphi)=\{[v]\in V/_{\ker\varphi}: \bar\varphi([v])=0\}$
$=\{[v] : \varphi(v)=0\}$
$=\{[v] : v\in\ker\varphi\}$
$=\{[0]\}$ $\quad (v\underset{\ker\varphi}{\sim}0)$ //

Problema: se $\varphi: V\longrightarrow W$ mappa lineare e $U\le V$

è vero che la funzione φ si fattorizza:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & W \\ & V/_U \arrow[u, "?"'] \end{tikzcd}$$

come $?\circ\pi=\varphi$?

$(?\circ\pi)(v)=\varphi(v)$?

$?(\pi(v))$

$?([v])$

Risposta: eventualmente è unico modo di definire? è

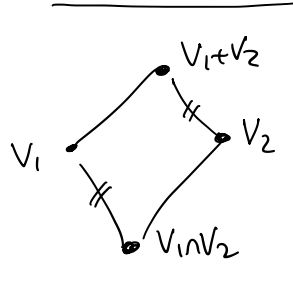
$?([v])=\varphi(v)$

e tale definizione è BEN POSTA

sse: $[v]=[v']\Rightarrow\varphi(v)=\varphi(v')$

sse $U\le\ker\varphi$

SECONDO TEO. ISOMORFISMO:



Consideriamo l'inclusione $V_1\hookrightarrow V_1+V_2$ composta con la proiezione

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1/_{V_1\cap V_2} \arrow[r, "\bar\varphi"] & V_1+V_2/_{V_2} \end{tikzcd}$$

$\ker(\varphi)=\{v_1\in V_1 : \varphi(v_1)=0\}$
$=\{v_1\in V_1 : \pi_2(\underbrace{i_1(v_1)}) = [0]_{V_2}\}$
$=\{\quad : \pi_2(v_1)=[v_1]_{V_2}=[0]_{V_2}\}$
$=\{v_1\in V_1 : v_1\in V_2\}$
$=V_1\cap V_2$

$im(\varphi)=V_1+V_2/_{V_2}$ (cioè φ è suriettiva)

infatti sia $[w]\in(V_1+V_2)/V_2$
$[v_1+v_2]_{V_2}$ $\quad v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$
$[v_1]_{V_2}+[v_2]_{V_2}$
$[v_1]_{V_2}+[0]_{V_2}=[v_1]_{V_2}=\varphi(v_1)$ //

Conclusione:

esiste un unico isomorfismo $V_1/_{V_1\cap V_2}\xrightarrow{\bar\varphi} V_1+V_2/_{V_2}$

tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\pi"'] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1/_{V_1\cap V_2} \arrow[r, "\bar\varphi"] & V_1+V_2/_{V_2} \end{tikzcd}$$

cioè $\bar\varphi\circ\pi=\pi_2\circ i_1$.

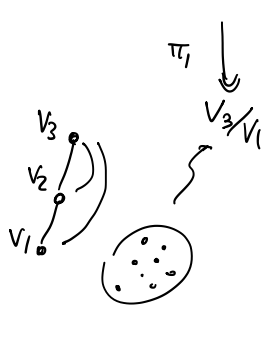
29/11/2022

TERZO TEO. ISOMORFISMO: $V_1\le V_2\le V_3$

$$\begin{tikzcd} V_3 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & V_3/_{V_2} \\ V_3/_{V_1} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$[v]_{V_1}\mapsto[v]_{V_2}$

$\ker(\pi_2)=V_2$, $\ker(\pi_1)=V_1$



applichiamo il 1° teo. iso a $\varphi: V_3/_{V_1}\longrightarrow V_3/_{V_2}$

$\dfrac{V_3/V_1}{\ker\varphi}\underset{\bar\varphi}{\xrightarrow{\sim}} im(\varphi)=V_3/_{V_2}$

$\ker(\varphi)=\{[v]_{V_1}\in V_3/V_1 : v\in V_3,\ \varphi([v]_{V_1})=[0]_{V_2}\in V_3/_{V_2}\}$ $\quad$ ($\varphi([v]_{V_1})=[v]_{V_2}$)
$=\{[v]_{V_1} : ~~v\in V_3~~,\ v\in V_2\}$ classi laterali modulo V_1 di vettori di V_2
$=V_2/_{V_1}$

conclusione $\dfrac{V_3/V_1}{V_2/V_1}\xrightarrow{\sim}V_3/_{V_2}$

esiste un unico isomorfismo $\bar\varphi: \dfrac{V_3/V_1}{V_2/V_1}\longrightarrow V_3/_{V_2}$

Tale che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & V_3/_{V_2} \\ V_3/_{V_1} \arrow[r, two heads] & \dfrac{V_3/V_1}{V_2/V_1} \arrow[u, "\cong\ \bar\varphi"'] \end{tikzcd}$$

//

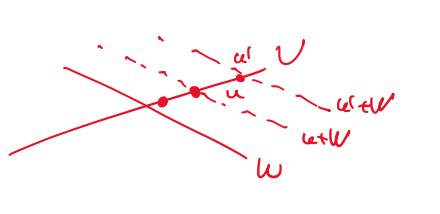
Problema: $V=U\oplus W$ $\quad U,W\le V$ $\quad$ ($\dim U+\dim W=\dim V$; $\dim U=\dim V-\dim W=\dim V/_W$)

allora $U\hookrightarrow V\twoheadrightarrow V/_W$

$v\longmapsto[v]_W=v+W$

$u\longmapsto u$

questa composizione è un ISOMORFISMO! ?



DUALITÀ: (se usiamo dim spaziamo $<\infty$)

V spazio vettoriale su K

$H=Hom_K(V,W)$ è sp. vettoriale su K,
$\dim_K H=\dim_K V\cdot\dim_K W$
$H\cong M_{\dim W,\dim V}(K)$

base di H è data da $\varphi_{ij}: V\longrightarrow W$

$j\begin{pmatrix}0&\overset{i}{0}&0\\ \vdots&1&\vdots\\0&0&0\end{pmatrix}\longleftrightarrow \varphi_{ij}(v_i)=\begin{cases}w_j & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$

se $\mathcal V=(v_1\dots v_n)$ base di V, $\mathcal W=(w_1,\dots,w_n)$ base di W

Caso particolare:

$V^*:=Hom_K(V,K)$

- è spazio vettoriale su K (il DUALE di V) (i suoi elementi, $\varphi: V\to K$, si dicono COVETTORI)
- se $v_1,\dots,v_n$ base di V allora troviamo una base di V^* usando
  $v_i^*: V\longrightarrow K$, $v_j\longmapsto\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 1 & i=j\end{cases}$
  $v_1^*:\begin{cases}v_1\mapsto 1\\ v_j\mapsto 0\end{cases}$ $\quad v_2^*:\begin{cases}v_1\mapsto 0\\ v_2\mapsto 1\\ \ \mapsto 0\end{cases}$ $\quad\dots\quad v_n^*:\begin{cases}v_i\mapsto 0\\ v_n\mapsto 1\end{cases}$
  $V\longrightarrow K$, $\alpha_{\mathcal V,1}(v_1^*)=(1\cdots0)$ $\quad\alpha_{\mathcal V,1}(v_n^*)=(0\cdots01)$
  ATTENZIONE: $v_i^*: V\to K$ dipende da $v_1,\dots,v_n$ NON solo da v_i!
- se $\dim_K V<\infty$: $\dim_K(V^*)=\dim_K(V)$
  PERÒ non esiste un isomorfismo canonico
  $V\longrightarrow V^*$, $v_1\longmapsto v_1^*$, …, $v_n\longmapsto v_n^*$ DIPENDE DALLA BASE scelta, cambiando base CAMBIA la funzione!
- se invece $\dim_K(V)=\infty$ per esempio $\aleph_0$, per esempio $V=K[x]$, allora $V^*=(K[x])^*=Hom_K(K[x],K)$ esiste, ma NON è isomorfo a V, ha dimensione DIVERSA, più GRANDE!

$P(x)\in K[x]$, $=\sum_{i=0}^N a_ix^i$ $(N\in\mathbb N)$, base $1,x,x^2,x^3,\dots,x^n,\dots$

$\boxed{K[x]\cong K^{(\mathbb N)}=\{\mathbb N\to K \text{ quasi sempre } 0\}}\ \lneq\ K[x]^* = \{K[x]\to K, \text{lineare}\}$: $1\mapsto ?$, $x\mapsto ?$, $x^2\mapsto ?$, $x^i\mapsto ?$ $\boxed{=\{\mathbb N\to K \text{ qualsiasi}\}}$

$\dim>\aleph_0$

Idea geometrica:

$\varphi\in V^*$, $\varphi: V\longrightarrow K$ allora $im(\varphi)=\begin{cases}0\\K\end{cases}$

φ è o nulla o suriettiva

$\ker(\varphi)=\begin{cases}V & \text{se } \varphi=0\\ \text{iperpiano di } V & \text{se } \varphi\ne0\ (\dim=n-1)\end{cases}$

Allora c'è una mappa

$V^*\setminus\{0\}\longrightarrow$ Iperpiani di V
$\varphi\longmapsto\ker(\varphi)$

è suriettiva: ogni iperpiano è zero di 1 equazione lineare.

non è iniettiva: $\varphi=\lambda\psi$ $(\lambda\in K, \ne0)\Leftrightarrow\ker\varphi=\ker\psi$

$\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow$ facile: $\varphi: V\to K$, $\psi: V\to K$

$\ker\varphi=\ker\psi=\langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$ base ker

$\langle v_1,\dots,v_{n-1},u\rangle=V$ base di V

$\varphi(u)\in K$, $\psi(u)\in K\Rightarrow\varphi(u)=\lambda\psi(u)$, $\lambda=\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$

$\Rightarrow\varphi=\lambda\psi$ come funzione!

sulla base $v_1,\dots,v_{n-1},u$: $\begin{cases}\varphi(v_i)=0=\lambda\psi(v_i)\\ \varphi(u)=\lambda\psi(u)\end{cases}$ //

Morale: i covettori non nulli modulo moltiplicazione per $\lambda\in K^\times$ CORRISPONDONO agli IPERPIANI di V

30/11/2022

Riassunto dualità:

V sp. vett su K $\rightsquigarrow V^*:=Hom_K(V,K)$ spazio duale, sp. vett. su K ($W=K$ sp vett. dim 1)

$\dim_K(V)<\infty \rightsquigarrow \dim_K(V^*)=\dim_K(V)$

$\mathcal V=v_1,\dots,v_n$ base $V\rightsquigarrow\mathcal V^*=v_1^*,\dots,v_n^*$ base V^* dove $v_i^*: V\to K$ t.c. $v_i^*(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\ne j\end{cases}$

$V\longrightarrow V^*$, $v_i\longmapsto v_i^*$ iso di sp vett su K, ma DIPENDE DALLA BASE $\mathcal V$.

($\mathcal V=v_1\dots v_n$: $V\cong K^n=V_n(K)$, $M_{n,1}(K)$; $Hom_K(V,K)\cong M_{1,n}(K)$ base 1, base $\mathcal V$)

$\varphi: V\longrightarrow W$ lineare tra spazi vettoriali su K

$$\begin{tikzcd} V^* & W^* \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ \varphi^*(w^*) & w^* \arrow[l, mapsto] \end{tikzcd}$$

$w^*: W\to K$, $\varphi: V\to W$, $w^*\circ\varphi\in V^*$; $\varphi^*(w^*)=w^*\circ\varphi$

$\varphi\longmapsto\varphi^*$

$Hom_K(V,W)\longrightarrow Hom_K(W^*,V^*)$

due: ① φ^* lineare: $\varphi^*(\lambda w_1^*+w_2^*)\overset{?}{=}\lambda\varphi^*(w_1^*)+\varphi^*(w_2^*)$
$(\lambda w_1^*+w_2^*)\circ\varphi$
$\lambda w_1^*\circ\varphi+w_2^*\circ\varphi$

② $\varphi\longmapsto\varphi^*$ è lineare su K: $(\varphi_1+\varphi_2)^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*$

infatti $(\varphi_1+\varphi_2)^*(w^*)=w^*\circ(\varphi_1+\varphi_2)$
$=w^*\circ\varphi_1+w^*\circ\varphi_2$
$=\varphi_1^*(w^*)+\varphi_2^*(w^*)=(\varphi_1^*+\varphi_2^*)(w^*)$ $\forall w^*$

(è iso di spazi vettoriali)

inoltre: $(id_V)^*=id_{V^*}$

$(\psi\circ\varphi)^*(w^*)=w^*\circ(\psi\circ\varphi)$
$=(w^*\circ\psi)\circ\varphi$
$=\psi^*(w^*)\circ\varphi$
$=\varphi^*(\psi^*(w))$ $\forall w^*$

$\boxed{(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi\circ\varphi"'] & W \arrow[r, "\psi"] & U \arrow[r] & K \\ V^* & W^* \arrow[l, "\varphi^*"'] & U^* \arrow[l, "\psi^*"'] \arrow[ll, bend left, "(\psi\circ\varphi)^*"] \end{tikzcd}$$

$\varphi^*\circ\psi^*$ //

$m=\dim V$, $n=\dim W$

$$\begin{tikzcd} Hom(V,W) \arrow[r, "*"] & Hom(W^*,V^*) \\ M_{\dim W,\dim V}(K) \arrow[r, "A\mapsto A^t"] & M_{\dim V,\dim W}(K) \\ M_{n,m}(K) & M_{m,n}(K) \end{tikzcd}$$

$\varphi\longmapsto\varphi^*$ $\quad (\mathcal V,\mathcal W)$ $\quad (\mathcal W^*,\mathcal V^*)$

$\alpha_{\mathcal V,\mathcal W}(\varphi)$? $\quad\alpha_{\mathcal W^*,\mathcal V^*}(\varphi^*)=(\alpha_{\mathcal V,\mathcal W}(\varphi))^t$

dimostrazione: PROBLEMA!

$A=(a_{ij})=\alpha_{\mathcal V,\mathcal W}(\varphi)$: $(\varphi(v_1)\dots\varphi(v_m))=(w_1,\dots,w_n)A$

$\varphi(v_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}w_i$

$\Downarrow$

$\varphi^*(w_h^*)=\sum_{\ell=1}^m(a_{h\ell})v_\ell^*$ //

((nota: $(A^t)^t=A$ dunque ci aspettiamo una "formula" $(\varphi^*)^*=\varphi$: $\varphi: V\to W$, $\varphi^*: W^*\to V^*$, $\varphi^{**}: V^{**}\to W^{**}$, $Hom_K(V^*,K)$, ⚠ $Hom_K(Hom_K(V,K),K)$))

((FUNTORE DUALE = TRASPOSTA di φ))

$(a_{ij})=A=\alpha_{\mathcal V,\mathcal W}(\varphi)$: $\varphi(v_j)=\sum_i a_{ij}w_i$

$(b_{k\ell})$: $B=\alpha_{\mathcal W^*,\mathcal V^*}(\varphi^*)$: $\varphi^*(w_k^*)=\sum_\ell b_{k\ell}v_\ell^*$

calcoliamo sui vettori base $v_1,\dots,v_n$:

$\varphi^*(w_k^*)(v_j)=(\sum_\ell b_{k\ell}v_\ell^*)(v_j)$
$w_k^*(\varphi(v_j))$ $\quad\sum_\ell b_{k\ell}\underbrace{v_\ell^*(v_j)}_{\delta_{\ell j}}$
$w_k^*(\sum_i a_{ij}w_i)$ $\quad b_{kj}$
$\sum_i a_{ij}\underbrace{w_k^*(w_i)}_{\delta_{ki}}$
a_{kj}

$b_{j\ell}=a_{\ell j}$

$B=A^t$

Significato geometrico di φ^*:

$(V^*\setminus\{0\})/_{K^\times}\cong$ iperpiani di V

$\varphi: V\longrightarrow W$

e H è iperpiano di V allora $\varphi(H)\le W$ di solito NON è iperpiano di W!

Invece se L è iperpiano di W allora $\varphi^{-1}(L):=\{v\in V : \varphi(v)\in L\}\le V$ è IPERPIANO di V

se $L=\{w\in W : \sum a_ix_i=0\}=\{w\in W : (a_1\dots a_n)x=0\}$
$=\{w\in W : \xi(w)=0 \text{ per } \xi\in W^*\}$
$=\{w\in W : w\in\ker(\xi),\ \xi\in W^*\}$

allora $\varphi^{-1}(L):=\{v\in V : \varphi(v)\in L\}$
$=\{v\in V : \xi(\varphi(v))=0\}$ $\quad\xi\circ\varphi(v)$
$=\{v\in V : \varphi^*(\xi)(v)=0\}$ $\quad\varphi^*(\xi)$
$=\ker(\varphi^*(\xi))$

Morale: φ^* descrive l'antiimmagine tramite φ degli iperpiani di W (che diventano iperpiani di V)

$\varphi^{-1}(L)$ è iperpiano di V di covettore $\varphi^*(\xi)$ $\longleftrightarrow$ L = iperpiano di W di covettore $\xi\in W^*$

$\boxed{(a_1\dots a_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}}$ equazione di $\varphi^{-1}(L)$ $\longleftarrow$ $(a_1\dots a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$ equazione di L

$(b_1\dots b_m)=(a_1\dots a_n)A$

$\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

Domanda: se $\varphi: V\to W$ conosco $\ker\varphi$, $im\varphi$, cosa posso dire di $\varphi^*: W^*\to V^*$? $\ker\varphi^*$? $im\varphi^*$?

Teorema di DUALITÀ:

La funzione $\boxed{V\times V^*\longrightarrow K}$ $\quad$ "CROCHET" (fisici)

$(v,v^*)\longmapsto v^*(v)=:\langle v,v^*\rangle$
$=: v\circ v^*$ (matematici)
$=: v\bullet v^*$

ha le seguenti proprietà:

① è BI-LINEARE su K, cioè:

- $(\lambda v_1+v_2)\circ v^*=\lambda v_1\circ v^*+v_2\circ v^*$ $\quad\forall v_1,v_2,v\in V$
- $v\circ(\lambda v_1^*+v_2^*)=\lambda v\circ v_1^*+v\circ v_2^*$ $\quad\forall v_1^*,v_2^*,v^*\in V^*$ $\forall\lambda\in K$

"lineare su ogni argomento FISSATO L'ALTRO"

nota: $(v_1+v_2)\circ(v_1^*+v_2^*)=v_1\circ v_1^*+v_1\circ v_2^*+v_2\circ v_1^*+v_2\circ v_2^*$

(non è lineare! non è $=v_1\circ v_1^*+v_2\circ v_2^*$!)

② è NON-DEGENERE:

- $v\circ v^*=0$ $\forall v^*\in V^*\Rightarrow v=0$
- $v\circ v^*=0$ $\forall v\in V\Rightarrow v^*=0$

facile: $v^*: V\to K$, $v^*(v)=0$ $\forall v$ $\Rightarrow v^*=0$ (come funzione)

meno ovvio: se un vettore $v\in V$ è annullato da tutti i $v^*\in V^*$: è zero?

sì perché se $v_1\dots v_n$ è base $v=\sum a_iv_i\Rightarrow v_j^*(v)=v_j^*(\sum a_iv_i)$

$0=\sum_i a_i\underbrace{v_j^*(v_i)}_{\delta_{ij}}=a_j$ $(\forall j)$

dunque $a_j=0$ $\forall j\Rightarrow v=\underline{0}$ //

TEOREMA DI BIDUALITÀ: (dim sp.vett $<\infty$)

c'è un isomorfismo CANONICO:

$ev=ev: V\longrightarrow V^{**}$ $\quad$ "evaluation"

$v\longmapsto(V^*\to K,\ \xi\longmapsto ev(v)(\xi):=\xi(v))$ $\quad$ $\xi: V\to K$

$\left(v\longmapsto ev(v): V^*\to K,\ \xi\longmapsto ev(v)(\xi)=\xi(v)\right)$

inoltre identificando V e V^{**} tramite ev abbiamo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ev_V"'] & W \arrow[d, "ev_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

cioè φ^{**} si identifica con φ tramite gli isomorfismi di valutazione.

Cosa bisogna dimostrare?

(0) la funzione ev è definita nel teorema

(1) se $v\in V$: $ev(v): V^*\to K$ è lineare? cioè $\in V^{**}$?

$ev(v)(\xi+\zeta)=ev(v)(\xi)+ev(v)(\zeta)$?

$(\xi+\zeta)(v)$ $\quad\xi(v)+\zeta(v)$ $\quad$ bilinearità

(2) $ev: V\to V^{**}$ è lineare?

$ev(v+v')=ev(v)+ev(v'): V^*\to K$

$ev(v+v')(\xi)$ $\quad(ev(v)+ev(v'))(\xi)$

$\xi(v+v')$ $\quad\xi(v)+\xi(v')$ ✓

(3) ev è iso? siccome $\dim V=\dim V^{**}$, basta vedere che $\ker(ev)=0$

e $\ker(ev)=\{v\in V : ev(v)=0\in V^{**}\}$
$=\{v\in V : ev(v)(\xi)=0\ \forall\xi\in V^*\}$ $\quad\xi(v)=0$

per non-degenerazione $=\langle0\rangle$ //

ORTOGONALITÀ TRA V e V^*:

$S\subseteq V$ definiamo $S^\perp:=\{\xi\in V^* : \xi(s)=0\ \forall s\in S\}$
$=\{\xi\in V^* : \xi(S)=0\}$
$\le V^*$

nota se $U\le V$, $U=\langle u_1,\dots,u_s\rangle$ allora $\{u_1,\dots,u_s\}^\perp=U^\perp$

Proprietà della funzione $\perp$: sottospazi$(V)\longrightarrow$ sottospazi(V^*)
$\mathfrak S(V)$ $\quad\mathfrak S(V^*)$
$W\longmapsto W^\perp=\{\xi\in V^* : \xi(W)=0\}$
$=\{\xi\in V^* : \ker(\xi)\ge W\}$

$\perp$ è un (ANTI)ISOMORFISMO INVOLUTORIO di RETICOLI:

(0) $V^\perp=\{0\}$, $\{0_V\}^\perp=V^*$

(1) $W_1\le W_2\ \overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}\ W_1^\perp\ge W_2^\perp$

infatti $W_2^\perp=\{\xi : \xi(W_2)=0\}$ $\Downarrow W_1\le W_2$ $\le\{\xi : \xi(W_1)=0\}=W_1^\perp$

(2) $(W^\perp)^\perp\le V^{**}\cong V$

in questa identificazione: $(W^\perp)^\perp=W$

(nota: i due $\perp$ hanno significati diversi:

$\perp: \mathfrak S(V)\to\mathfrak S(V^*)$, $W\mapsto W^\perp=\{\xi\in W^* : \xi(W)=0\}$ $\ker\xi\ge W$

$\perp: \mathfrak S(V^*)\to\mathfrak S(V)$, $U\mapsto U^\perp=\{v\in V : u(v)=0\ \forall u\in U\}$
$=\{v\in V : v\in\ker u\ \forall u\in U\}$
$=\bigcap_{u\in U}\ker(u)$)

(3) $(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$
$(W_1\cap W_2)^\perp=W_1^\perp+W_2^\perp$

(4) $\dim_K(W^\perp)=\dim_K(V)-\dim_K(W)$
(in particolare $\dim_K(W^{\perp\perp})=\dim_K(W)$)

dim (0) ovvio

(1) facile

(4) viene da Rouché Capelli

(2) W e $W^{\perp\perp}$ hanno la stessa dimensione, basta mostrare una inclusione: $W\subseteq W^{\perp\perp}$

infatti per ogni $v\in W$ abbiamo che $\underline{\text{se }\xi\in W^\perp}$ allora $\xi(v)=0$

quindi per OGNI $\xi\in W^\perp$ si ha $\xi(v)=0$

cioè $v\in(W^\perp)^\perp$ //

(3) $(W_1+W_2)^\perp=\{\xi : \xi(W_1+W_2)=0\}$
$=\{\xi : \xi(W_1)=0,\ \xi(W_2)=0\}$
$=\{\xi : \xi(W_1)=0\}\cap\{\xi : \xi(W_2)=0\}$
$=W_1^\perp\cap W_2^\perp$

l'altra formula si ottiene da questa usando $W_1\rightsquigarrow W_1^\perp$, $W_2\rightsquigarrow W_2^\perp$:

$((W_1^\perp+W_2^\perp)^\perp)^\perp=(W_1^{\perp\perp}\cap W_2^{\perp\perp})^\perp=(W_1\cap W_2)^\perp$

$W_1^\perp+W_2^\perp=(W_1\cap W_2)^\perp$ //

05/12/2022

$\ker(\varphi^*)=(im(\varphi))^\perp$

$im(\varphi^*)=(\ker(\varphi))^\perp$

in particolare φ^* è iniettiva sse φ suriettiva
φ^* è suriettiva sse φ iniettiva

φ^* iniettiva $\Leftrightarrow\ker\varphi^*=0$
$\Leftrightarrow(im\varphi)^\perp=0$
$\Leftrightarrow im\varphi=V$
$\Leftarrow\varphi$ suriettiva

φ^* suriettiva $\Leftrightarrow im(\varphi^*)=V^*$
$\Leftrightarrow(\ker(\varphi))^\perp=V^*$
$\Leftrightarrow\ker(\varphi)=0$
$\Leftrightarrow\varphi$ iniettiva.

$\varphi: V\longrightarrow W$ lineare

$\varphi^*: W^*\longrightarrow V^*$

$\ker(\varphi^*)=\{w^*\in W^* : \varphi^*(w^*)=0\in V^*\}$
$=\{w^*\in W^* : w^*\circ\varphi=0: V\to K\}$

$=\{w^*\in W^* : w^*(im\varphi)=0\}$
$=(im\varphi)^\perp\le W^*$ $\quad(im(\varphi)\le W)$

da $\ker(\varphi^*)=im(\varphi)^\perp$ usando φ^* invece di φ:

$\ker(\varphi^{**})=(im(\varphi^*))^\perp$; $\ker(\varphi^{**})=\ker(\varphi)$

e allora $\ker(\varphi)^\perp=(im(\varphi^*))^{\perp\perp}=im(\varphi^*)\le V^*$

Duali di sottospazi di V sono quozienti di V^* (e viceversa):

$U\le V\Rightarrow i: U\hookrightarrow V$ $\quad\ker(i)=0$, $im(i)=U$

$i^*: V^*\twoheadrightarrow U^*$ $\quad\ker(i^*)=im(i)^\perp=U^\perp\le V^*$, $im(i^*)=\ker(i)^\perp=0^\perp=U^*$ $\quad$ facili

Il 1° iso $V^*/_{\ker i^*}\cong im\, i^*$

$\boxed{V^*/_{U^\perp}\cong U^*}$

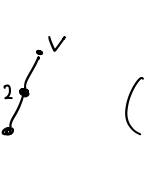
$V\xrightarrow{\pi}V/_U$, $\quad\pi^*: (V/_U)^*\hookrightarrow V^*$

problema: $\boxed{(V/_U)^*\cong U^\perp}\le V^*$

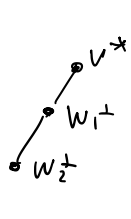
Problemi:

① $(V\times W)^*\cong V^*\times W^*$ $\quad$ duale del prodotto è prodotto dei duali!

②



$\left(W_2/_{W_1}\right)^*\cong W_1^\perp/_{W_2^\perp}$



③ $(Hom_K(V,W))^*\cong Hom_K(V^*,W^*)$
$\cong Hom_K(W,V)$

iso canonici, problema quasi impossibile.

Riassunto finale sulla dualità:

① V sp.vett su $K\rightsquigarrow V^*=Hom_K(V,K)$ sp.duale

$v_1,\dots,v_n$ base $V\rightsquigarrow v_1^*,\dots,v_n^*$ base V^*

$\dim_K V^*=\dim_K V$ se finite

$V_n(K)=M_{n,1}(K)$ $\quad M_{1,n}(K)$

(se $v\in V$ ha coord $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ e $v^*\in V^*$ ha matrice $(a_1\dots a_n)$: $v^*(v)=(a_1\dots a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum a_ix_i\in K$)

② $\varphi: V\to W$ lineare $\rightsquigarrow\varphi^*: W^*\to V^*$

$\xi\longmapsto\varphi^*(\xi):=\xi\circ\varphi$

appl. TRASPOSTA o DUALE

$A=\alpha_{\mathcal V,\mathcal W}(\varphi)\rightsquigarrow\alpha_{\mathcal W^*,\mathcal V^*}(\varphi^*)=A^t$

$$\begin{tikzcd} Hom_K(V,W) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal V,\mathcal W}"'] & Hom_K(W^*,V^*) \arrow[d, "\alpha_{\mathcal W^*,\mathcal V^*}"] \\ M_{n,m}(K) \arrow[r] & M_{m,n}(K) \end{tikzcd}$$

iso lineare tra sp.vett/K

corrisponde alla TRASPOSIZIONE di matrici

③ dualità e bidualità:

$V\times V^*\longrightarrow K$
$(v,v^*)\longmapsto v^*(v)$

è
- bilineare/K
- non degenere

e $V\xrightarrow{ev}V^{**}$
$v\longmapsto ev(v): V^*\to K$
$v^*\longmapsto ev(v)(v^*)=v^*(v)$

iso CANONICO di sp.vett/K,

e
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "ev_V"'] & W \arrow[d, "ev_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "\varphi^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$
commuta

④ ortogonalità:

le funzioni

$\perp: \mathfrak S(V)\to\mathfrak S(V^*)$, $U\longmapsto U^\perp=\{v^*\in V^* : v^*(u)=0\ \forall u\in U\}$

e $\perp: \mathfrak S(V^*)\to\mathfrak S(V)$, $W\longmapsto W^\perp=\{v\in V : \xi(v)=0\ \forall\xi\in W\}$

sono antiisomorfismi di reticoli uno inverso dell'altro, oppure "antiisomorfismo involutorio di reticoli".

⑤ Conseguenze sulle funzioni $\varphi: V\to W$:

$\ker(\varphi^*)=(im(\varphi))^\perp$: φ^* iniettiva sse φ suriettiva

$im(\varphi^*)=(\ker(\varphi))^\perp$: φ^* suriettiva sse φ iniettiva

(φ^* iso sse φ iso)

significato per le matrici?

⑥ Conseguenze per sottospazi e quozienti:

$U\le V$: $i_U: U\to V\Rightarrow i_U^*: V^*\to U^*\Rightarrow U^*\cong V^*/_{U^\perp}$

($\ker i_U=0$, $im\, i_U=U$) $\quad$ ($\ker i_U^*=U^\perp$, $im\, i_U^*=U^*$)

cioè i duali di sottospazi di V sono quozienti di V^*

$V\xrightarrow{\pi}V/_U$, $\ker\pi=U$, $im\,\pi=V/_U$ $\Rightarrow\pi^*: (V/_U)^*\to V^*\Rightarrow(V/_U)^*\cong U^\perp$

$\ker\pi^*=0$, $im\,\pi^*=U^\perp$

cioè i duali di quozienti di V sono sottospazi di V^*

$\boxed{\text{La dualità SCAMBIA sottospazi e quozienti!}}$

⑦ Significato "geometrico":

V vettori $\quad(V^*\setminus\{0\})/_{K^\times}$ covettori non nulli modulo proporzionalità

$v^*\updownarrow$ $\quad\cong$

$\ker(v^*)\le V$ $\quad$ iperpiani di V

$\varphi: V\to W$ $\quad\varphi^*: W^*\to V^*$, $\xi\longmapsto\varphi^*(\xi)=\xi\circ\varphi$

descrive l'azione di φ sugli iperpiani di W:

se L è iperpiano di W di covettore ξ, allora $\varphi^*(\xi)$ è covettore di V con iperpiano corrisp $\varphi^{-1}(L)$.

* Problemi

- se $W_1\le W_2\le V$ allora $\left(W_2/_{W_1}\right)^*\cong W_1^\perp/_{W_2^\perp}$ canonicamente isomorfo
- duale del prodotto: $(V\times W)^*\cong V^*\times W^*$ canonicamente isomorfo
- duale di Hom: $(Hom_K(V,W))^*\cong Hom_K(V^*,W^*)$
  $\cong Hom_K(W,V)$
  ⚠ molto difficile!

* Problema di calcolo della base duale:

se $v_1,\dots,v_n$ è base di $V_n(K)$ la base duale $v_1^*,\dots,v_n^*$ di $(V_n(K))^*$ è data dai covettori t.c.

$v_i^*(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\ne j\end{cases}$

e trovarli è equivalente a trovare la matrice inversa di $H=\underbrace{(v_1,v_2,\dots,v_n)}_{\text{colonne di}}$

se $\boxed{H^{-1}H=\mathbb 1_n}$ allora $v_i^*=$ i-esima riga di H^{-1}.

Problema: DUALI DI PROIEZIONI E SIMMETRIE?

$V=U\oplus W$: $(\pi_W^U)^*=?$, $(\sigma_W^U)^*=?$