(•) $V = U \oplus W = U \oplus W'$ cioè W, W' sono COMPLEMENTARI di U diversi tra loro.

mostrare che $\pi^U_{W'} \circ \pi^U_W = \pi^U_{W'}$ (in particolare, π^U_W e $\pi^U_{W'}$ non commutano tra loro)

ma $\pi^U_W \neq \pi^{U}_{W'}$ (loro che $\pi^U_W - \pi^U_{W'} = \pi^{U}_{W''}$ per qualche sottospazio W''?)

$\sigma^U_{W'} \circ \sigma^U_W \neq \sigma^U_{W'}$

composizione di proiezioni è proiezione? di simmetrie è simmetria?

Abbiamo $V = U \oplus W = U \oplus W'$

$\pi^U_W : V \longrightarrow V$, $v = u + w \mapsto \pi^U_W(v) := w$ ($u \in U$, $w \in W$)

$\pi^U_{W'} : V \longrightarrow V$, $v = u' + w' \mapsto \pi^U_{W'}(v) := w'$ ($u' \in U$, $w' \in W'$)

per calcolare $\pi^U_{W'} \circ \pi^U_W$:

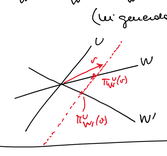
$\pi^U_{W'}(\pi^U_W(v)) = \pi^U_{W'}(w) = w'$ ← sono =

$v = u + w$, $w = u' + w'$ ($u \in U$, $w \in W$; $u' \in U$, $w' \in W'$)

ma $v = u + w = \underbrace{u + u'}_{U} + \underbrace{w'}_{W'}$, dunque $\pi^U_{W'}(v) = w'$

Quindi $\pi^U_{W'} \circ \pi^U_W = \pi^U_{W'} \neq \pi^U_W = \pi^U_W \circ \pi^U_{W'}$.
(in generale)

Disegno:



$\sigma^U_{W'} \circ \sigma^U_W = (2\pi^U_{W'} - id_V) \circ (2\pi^U_W - id_V)$
$= 4\underbrace{\pi^U_{W'} \circ \pi^U_W}_{\pi^U_{W'}} - 2\pi^U_{W'} - 2\pi^U_W + id_V$
$= 2\pi^U_{W'} \underbrace{- 2\pi^U_W + id}$
$= 2\pi^U_{W'} - \sigma^U_W$

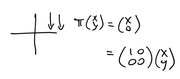
oppure $= \underbrace{2\pi^U_{W'} - id_V - 2\pi^U_W + 2id_V}$
$= \sigma^U_{W'} + 2\pi^U_W$

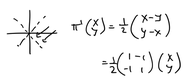
Chiamiamo $\varphi = \pi^U_W - \pi^U_{W'}$.
allora
$\varphi \circ \varphi = (\pi^U_W - \pi^U_{W'}) \circ (\pi^U_W - \pi^U_{W'})$
$= \pi^U_W \circ \pi^U_W - \pi^U_W \circ \pi^U_{W'} - \pi^U_{W'} \circ \pi^U_W + \pi^U_{W'} \circ \pi^U_{W'}$
$= \pi^U_W - \pi^U_W - \pi^U_{W'} + \pi^U_{W'}$
$= 0$
che di solito è $\neq$ da φ, quindi φ non è proiezione.

D'altra parte $\varphi(v) \in U$ per ogni $v \in V$, quindi non può essere π^U_W per qualche W...

No, in generale composizioni di proiezioni (risp. simmetrie) non sono proiezioni (risp. simm.).

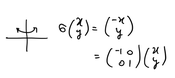
Esempi nel piano:

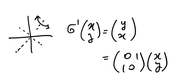
① 
$\pi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$


$\pi'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-y\\y-x\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ma le composizioni hanno matrici $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ e $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$

e il prodotto non sono sì stesse.

② 
$\sigma\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$


$\sigma'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ma le composizioni $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ e il prodotto non danno l'identità.

(•) Sia A matrice quadrata t.c. $A^2 = A$
mostrare che esiste una matrice invertibile H tale che
$H^{-1} A H = \left(\begin{array}{c|c}1\ 0 & 0\\ 0\ 1 & \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$
dove il numero di 1 è il rango di A.

Stesso problema: sia $\pi : V \to V$ con $\pi^2 = \pi$, mostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che
$\alpha_{\mathcal{B}}(\pi) = \left(\begin{array}{c|c}1\ 0 & 0\\ 0\ 1 & \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.

Scrivere lo stesso problema con le simmetrie (indici A con $A^2 = \mathbb{1}_n$, funzioni σ con $\sigma^2 = id_V$).

$\pi : V \to V$ proiezione sse $\pi^2 = \pi$
e allora $\pi = \pi^{\ker(\pi)}_{\mathrm{im}(\pi)}$,
cioè è proiezione su $\mathrm{im}(\pi)$
con direzione $\ker(\pi)$

$\Rightarrow$ ovvio: se π proiezione associata a $V = U \oplus W$ (sia $\pi = \pi^U_W$)
allora $\pi^2 = \pi$ e $\ker \pi = U$, $\mathrm{im}\, \pi = W$

$\Leftarrow$ scriviamo $v \in V$ come $v = \underbrace{\pi(v)}_{\mathrm{Im}(\pi)} + \underbrace{(v - \pi(v))}_{\ker(\pi)}$ perché $\pi(v - \pi v) = \pi v - \pi^2 v = \pi v - \pi v = 0$

dunque $V = \mathrm{im}(\pi) \oplus \ker(\pi)$
perché $\mathrm{im}\,\pi \cap \ker \pi = \langle 0 \rangle$
(se v: $v = \pi(u)$ allora $\pi^2(u) = \pi(\pi u) = \pi(v) = 0$, $\pi(v) = 0$)

e usando una base di $\mathrm{im}(\pi)$ e una di $\ker(\pi)$
abbiamo matrice $\begin{pmatrix}\mathbb{1}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: $v \in \mathrm{im}(\pi) \Rightarrow \pi(v) = \pi(\pi u) = \pi u = v$, $= \pi(u)$

$\sigma : V \to V$ è simmetria sse $\sigma^2 = id_V$
e allora $\sigma = \sigma^{V_-}_{V_+}$ dove
$V_+ = \{v \in V : \sigma v = v\}$
$V_- = \{v \in V : \sigma v = -v\}$

$\Rightarrow$ facile $\sigma = \sigma^U_W$ allora W è sottospazio dei vettori fissi, U è sottospazio dei vettori mandati nell'opposto
e $\sigma^2 = id_V$

$\Leftarrow$ scriviamo
$v = v_+ + v_-$ con $\sigma v_+ = v_+$, $\sigma v_- = -v_-$
allora $\sigma v = v_+ - v_-$
e troviamo necessariamente che
$v_+ = \frac{v + \sigma v}{2}$, $v_- = \frac{v - \sigma v}{2}$

NOTA: il campo deve avere caratteristica $\neq 2$, cioè $2 \neq 0$.

quindi $V_+ + V_- = V$
inoltre $V_+ \cap V_- = \langle 0 \rangle$ perché $\sigma v = v$ da $v = -v$, $\sigma v = -v$, $2v = 0$, $v = 0$ ($2 \neq 0$)
da cui $V = V_+ \oplus V_-$
e $\sigma = \sigma^{V_-}_{V_+}$ perché è identità su V_+, opposto su V_-.

Usando basi di V_+ e di V_- si ottiene una matrice del tipo $\begin{pmatrix}\mathbb{1}_k & 0\\ 0 & -\mathbb{1}_s\end{pmatrix}$.

(••) Quali sono le matrici che elevate alla seconda danno l'identità?

cioè cercare $X \in M_n(K)$ t.c. $X^2 = \mathbb{1}_n$.

Quali sono le matrici che elevate alla seconda danno la matrice nulla?

cioè cercare $X \in M_n(K)$ t.c. $X^2 = \mathbb{0}_n$

Problemi:

(•) per matrici quadrate $A, B \in M_n(K)$
di solito $AB \neq BA$.

domanda: quali sono le matrici che COMMUTANO con TUTTE?
cioè A t.c. $AX = XA$ $\forall X \in M_n(K)$?

(Si chiama "CENTRO DELL'ALGEBRA": per esempio $\mathbb{1}_n$, $\mathbb{0}_n$ ci stanno....).

(•) quali sono le matrici che commutano con TUTTE le matrici DIAGONALI $\left(\equiv \begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots\ a_n\end{pmatrix}\right)$?

Sia A tale che $AX = XA$ per ogni matrice X.

In particolare: $Ae_{11} = e_{11}A$, $e_{11} = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&\\ \vdots&&&\\0&0&&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\a_{21}&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

usando $Ae_{ij} = e_{ij}A$ vediamo allora che la matrice A deve essere diagonale $A = \begin{pmatrix}a_1&&0\\&a_2&\\0&&\ddots\ a_n\end{pmatrix}$

Poi: $Ae_{12} = e_{12}A$, $e_{12} = \begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&&&\\ \vdots&&&&\\0&0&&&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&a_2&0&\cdots&0\\&&&&\\ \vdots&&&&\\&&&&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\&&&&\\ \vdots&&&&\\&&&&0\end{pmatrix}$$

da cui $a_1 = a_2$,
e usando $Ae_{ij} = e_{ij}A$ abbiamo $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a$

Dunque: $A = \begin{pmatrix}a&&0\\&\ddots&\\0&&a\end{pmatrix} = a\mathbb{1}_n$, SOLO le MATRICI SCALARI.

Sia A t.c. $A\Delta = \Delta A$ per ogni matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix}\delta_1&&0\\&\ddots&\\0&&\delta_n\end{pmatrix}$

Come prima (usando $\Delta = e_{ii}$) si trova che A è diagonale,

poi si vede che basta questo, perché

$$A\Delta = \begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&0\\&\ddots&\\0&&\delta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\delta_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n\delta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_1&&0\\&\ddots&\\0&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n\end{pmatrix} = \Delta A$$

Quindi: solo (e tutte) le matrici diagonali commutano con le matrici diagonali.

Idea: le matrici diagonali formano una sotto-K-algebra commutativa delle matrici?
quali sono i divisori di zero?
quali sono invertibili?
(il prodotto cartesiano K^n è K-algebra? campo?)

(▣) Esercizio di ripasso:
in K^4 scegliere due sottospazi $U, V \leq K^4$ di dimensione 2 in somma diretta:
$K^4 = U \oplus V$ $\quad U = \langle u_1, u_2 \rangle$, u_1, u_2 base di U
$V : \begin{cases} a_1 x = 0 \\ a_2 x = 0 \end{cases}$ equazioni cartesiane di V
(a_1 riga: $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0$, idem per a_2)

Usando solo questi dati scrivere le matrici di proiezioni e simmetrie associate a U e V.
(PROVABILE ANCHE CON DEI NUMERI!)

Usiamo coordinate ed eq. cartesiane in base canonica di K^4
(stesso discorso vale in base di qualsiasi di V):

abbiamo matrici $A = \begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}$ (coordinate dei generatori di U, $M_{4,2}(K)$) e $B = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ (coefficienti delle equazioni di V, $M_{2,4}(K)$)

e risulta $BX = 0$ per ogni vettore $X \in V$
d'altra parte $BA = \boxed{B}\boxed{A} = \boxed{\ } \in M_2(K)$

è matrice invertibile, cioè di rango 2,
perché $K^2 \xrightarrow{\varphi_A} K^4 \xrightarrow{\varphi_B} K^2$ è isomorfismo
$e_1 \mapsto u_1$, $e_2 \mapsto u_2$ } $\mapsto$ nessuna combinazione viene mandata a zero ($\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ e non soddisfa equazioni di V)

allora la matrice $A(BA)^{-1}B$
ha la proprietà che: manda a 0 tutti i vettori di V
manda in sé stessi tutti i vettori di U
(perché si vede sulla base $A = (u_1, u_2)$:
$A(BA)^{-1}BA = A$)

dunque
$\alpha_{\mathcal{E}}(\pi^V_U) = A(BA)^{-1}B$ //

notare che la formula non è stupida, B e A non sono matrici quadrate...

Esempi: $K^4 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3, e_4 \rangle$
$A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ equazioni
$BA = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\alpha_{\mathcal{E}}(\pi^V_U) = A(BA)^{-1}B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

$K^4 = \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4 \rangle \oplus \langle e_1 - e_4, e_2 + e_3 \rangle$
$A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$
$BA = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $(BA)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$
$\alpha_{\mathcal{E}}(\pi^V_U) = A(BA)^{-1}B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$
$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$, ok!

(••) Dati V, W spazi vettoriali su K,
e sottospazi $U \leq V$, $\mathcal{W} \leq W$:

è vero che $V \times W / U \times \mathcal{W}$ è isomorfo a $V/U \times W/\mathcal{W}$?

come possiamo dire di $(U \times \mathcal{W})^*$ e $(V \times W / U \times \mathcal{W})^*$?

Realizziamo le proiezioni canoniche $V \xrightarrow{\pi} V/U$ e $W \xrightarrow{\sigma} W/\mathcal{W}$

e definiamo una funzione
$V \times W \xrightarrow{\pi \times \sigma} V/U \times W/\mathcal{W}$
tramite $(\pi \times \sigma)(v, w) := (\pi(v), \sigma(w)) = ([v], [w])$
(si vede subito che è lineare).
Si vede subito che $\pi \times \sigma$ è funzione SURIETTIVA,
e si calcola
$\ker(\pi \times \sigma) = \{(v, w) : (\pi(v), \sigma(w)) = (0, 0)\}$
$= \{(v, w) : v \in \underset{U}{\ker \pi},\ w \in \underset{\mathcal{W}}{\ker \sigma}\}$
$= U \times \mathcal{W}$,
e si applica il primo teorema isomorfismo
$V \times W / U \times \mathcal{W} = V \times W / \ker(\pi \times \sigma) \xrightarrow{\cong} \mathrm{im}(\pi \times \sigma) = V/U \times W/\mathcal{W}$ //

$(U \times \mathcal{W})^* \simeq U^* \times \mathcal{W}^* \simeq V^*/U^\perp \times W^*/\mathcal{W}^\perp \simeq (V^* \times W^*)/U^\perp \times \mathcal{W}^\perp$

in quanto:
$\mathrm{Hom}(U \times \mathcal{W}, P) \simeq \mathrm{Hom}(U, P) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{W}, P)$
$U \xrightarrow{i_U} U \times \mathcal{W} \xrightarrow{\varphi} P \longleftrightarrow \left(U \xrightarrow[\varphi \circ i_U]{} P,\ \mathcal{W} \xrightarrow[\varphi \circ i_{\mathcal{W}}]{} P\right)$
$\mathcal{W} \xrightarrow{i_{\mathcal{W}}}$
poi si usa $P = K$

$\left(V \times W / U \times \mathcal{W}\right)^* \simeq \left(V/U \times W/\mathcal{W}\right)^* \simeq (V/U)^* \times (W/\mathcal{W})^* \simeq U^\perp \times \mathcal{W}^\perp$
oppure $\simeq (U \times \mathcal{W})^\perp$ che è isomorfo a $U^\perp \times \mathcal{W}^\perp$ //

(▲) date due funzioni lineari $V \xrightarrow{\varphi} U$, $W \xrightarrow{\psi} U$
possiamo costruire una funzione lineare
$(\varphi, \psi) : V \times W \longrightarrow U$
data da $(\varphi, \psi)(v, w) := \varphi(v) - \psi(w)$

descrivere: $\ker(\varphi, \psi)$
$(\varphi, \psi)^*$
$\ker((\varphi, \psi)^*)$

mostriamo che (φ, ψ) è lineare:

$(\varphi, \psi)(\lambda(v, w) + (v', w')) =$
$(\varphi, \psi)(\lambda v + v', \lambda w + w') =$
$\varphi(\lambda v + v') \pm \psi(\lambda w + w') =$
$\lambda\varphi(v) + \varphi(v') \pm \lambda\psi(w) \pm \psi(w') =$
$\lambda(\varphi, \psi)(v, w) \pm (\varphi, \psi)(v', w')$ //

$(\varphi, \psi) : V \times W \longrightarrow U$
$(v, w) \longmapsto \varphi(v) - \psi(w)$

$\ker(\varphi, \psi) = \{(v, w) : (\varphi, \psi)(v, w) = 0_U\}$
$= \{(v, w) : \varphi v - \psi w = 0_U\}$
$= \{(v, w) : \varphi(v) = \psi(w)\} \leq V \times W$
"coppie che hanno la stessa immagine in U"

$(\varphi, \psi)^* : U^* \longrightarrow (V \times W)^* = V^* \times W^*$
$u^* \longmapsto (\varphi, \psi)^*(u^*) := u^* \circ (\varphi, \psi) = (u^* \circ \varphi, u^* \circ \psi)$
$= (\varphi^*(u^*), \psi^*(u^*))$
$= (\varphi^*, \psi^*)(u^*)$
($U \to K$)

cioè $(\varphi, \psi)^* = (\varphi^*, \psi^*)$
dove (φ^*, ψ^*) è funzione definita dalle funzioni $\varphi^* : U^* \to V^*$ e $\psi^* : U^* \to W^*$ mandando
$u^* \longmapsto (\varphi^* u^*, \psi^* u^*)$ ($u^* \in U^*$, $\varphi^* u^* \in V^*$, $\psi^* u^* \in W^*$)
ovvero dalla differenza $i \circ \varphi^* - j \circ \psi^*$

$$\begin{tikzcd} & V^* \arrow[dr, "i"] & \\ U^* \arrow[ur, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\psi^*"'] & & V^* \times W^* \\ & W^* \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

(▲) Altro esercizio di riassunto:

Siano V, W spazi vettoriali su K,
consideriamo il prodotto $V \times W$ e le 4 funzioni naturali

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "i_V"] & & V \\ & V \times W \arrow[ur, "\pi_V"] \arrow[dr, "\pi_W"'] & \\ W \arrow[ur, "i_W"'] & & W \end{tikzcd}$$

dove $i_V(v) = (v, 0)$, $\pi_V(v, w) = v$
$i_W(w) = (0, w)$, $\pi_W(v, w) = w$

calcolare le composizioni possibili.

VICEVERSA: se uno spazio vettoriale P ha 4 funzioni lineari

$$\begin{tikzcd} V \arrow[dr, "i"] & & V \\ & P \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \\ W \arrow[ur, "j"'] & & W \end{tikzcd}$$

tali che $\pi \circ i = id_V$, $\pi \circ j = 0$, $\sigma \circ i = 0$, $\sigma \circ j = id_W$
allora esiste un unico isomorfismo tra P e $V \times W$ tale che....

Quali di proiezioni? di simmetrie?

Se $V = U \oplus W$
e $\pi^U_W : V \longrightarrow V$, $v = u + w \mapsto \pi^U_W(v) = w$

abbiamo $(\pi^U_W)^* : V^* \longrightarrow V^*$ tale che:
$(\pi^U_W \circ \pi^U_W = \pi^U_W \Rightarrow)$ $(\pi^U_W)^* \circ (\pi^U_W)^* = (\pi^U_W)^*$
e quindi è proiezione di asse $\mathrm{im}((\pi^U_W)^*) = (\ker(\pi^U_W))^\perp = U^\perp$
e direzione $\ker((\pi^U_W)^*) = \mathrm{im}(\pi^U_W)^\perp = W^\perp$

dunque $(\pi^U_W)^* = \pi^{W^\perp}_{U^\perp}$.

Similmente $(\sigma^U_W)^* = \sigma^{W^\perp}_{U^\perp}$.

Si può vedere anche con le matrici:

$V = U \oplus W$
$\underbrace{u_1 \dots u_s}_{\text{base } U}$, $\underbrace{w_1 \dots w_k}_{\text{base } W}$
$\alpha_{\mathcal{B}}(\pi^U_W) = \left(\begin{array}{c|c}\mathbb{0}_s & \\ \hline & \mathbb{1}_k\end{array}\right)$

$V^* = W^\perp \oplus U^\perp$
$\underbrace{u_1^* \dots u_s^*}_{\text{base } W^\perp}$, $\underbrace{w_1^* \dots w_k^*}_{\text{base } U^\perp}$
$\alpha_{\mathcal{B}^*}((\pi^U_W)^*) = \left(\begin{array}{c|c}\mathbb{0}_s & \\ \hline & \mathbb{1}_k\end{array}\right)$
troppo, non è diagonale!

quindi manda a 0 $W^\perp$
e in sé stesso $U^\perp$ //