TEORIA DEL DETERMINANTE (per applicazioni e matrici)

Motivazioni (volume, indip. lineare, risoluzione sistemi lin.)

Funzioni n-lineari alternanti su V ($n = \dim V$)

definizione $\det(\varphi) = \delta(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) / \delta(v_1, \dots, v_n)$ (indip. da δ base $\neq 0$)

$\det(A) = \det(\varphi_A)$

Proprietà immediate: $\det \neq 0 \Leftrightarrow$ biettiva

binet

calcolo tramite PERMUTAZIONI

casi facili: ordine 2, 3

diagonali, triangolari, blocchi

metodi di calcolo: tramite agli sposi

formula di Laplace

- complementi algebrici e calcolo dell'inversa
- formula di CRAMER per sistemi quadrati biettivi.

applicazioni: minori e calcolo del rango

Principio dei minori orlati e calcolo di equazioni cartesiane

det VANDERMONDE

Motivazioni:

① sistema lineare quadrato $Ax = b$, $A \in M_n(K)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

allora le soluzioni sono del tipo:

$x_1 =$ espressione nelle a_{ij}, b_i

$x_2 =$ espressione nelle a_{ij}

$x_3 =$ " "

$\vdots$

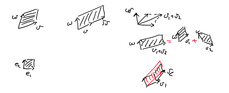
$x_n =$ " "

sempre lo stesso! moltiplicato per $\det(A)$

② problema di indipendenza lineare dei vettori e del rango di matrici

$\longrightarrow$ equazioni cartesiane di sottospazi senza usare le equazioni parametriche

③ calcolo di aree e volumi



Definizione: V sp. vett. di $\dim_K V = n < \infty$

diciamo che una funzione

$$\delta : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \longrightarrow K$$
$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto \delta(v_1, \dots, v_n)$$

è una **FORMA MULTILINEARE ALTERNANTE** se:

(codominio è K)

(1) MULTILINEARE su ogni ARGOMENTO:

$$\delta(\sum_i^n \lambda_i w_i, v_2, v_3, \dots, v_n) = \sum_i^n \lambda_i \delta(w_i, v_2, v_3, \dots, v_n)$$
$$\delta(v_1, \sum_i^n \lambda_i w_i, v_3, \dots, v_n) = \sum_i^n \lambda_i \delta(v_1, w_i, v_3, \dots, v_n)$$
$$\vdots$$
$$\delta(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \sum^n \lambda_i w_i) = \sum_i^n \lambda_i \delta(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w_i)$$

" la funzione è lineare su ogni ARGOMENTO bloccando gli altri argomenti".

(2) ALTERNANTE:

se $v_i = v_j$ con $i \neq j \Rightarrow \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$

Teorema: Sia V spazio, $n = \dim_K(V)$

$$n\text{-LinAlt}(V, K) = \{\delta : V_{n \text{ volte}} \to K : n\text{-lineari alternanti}\}$$

allora si tratta di uno spazio vettoriale su K (usando $(\delta_1 + \delta_2)(\dots) = \delta_1(\dots) + \delta_2(\dots)$ come operazioni...)

e

$$\dim_K (n\text{-LinAlt}(V, K)) = 1$$

anzi se $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V allora la funzione

$$n\text{-LinAlt}(V, K) \longrightarrow K$$
$$\delta \longmapsto \delta(v_1, \dots, v_n)$$

è un ISOMORFISMO di SPAZI VETTORIALI (dipende dalla base scelta!).

((**Osservazione**:

ALTERNANTE $\Rightarrow$ ANTISIMMETRICA (se K ha caratt. $\neq 2$)

$\delta(v, v) = 0 \Rightarrow \delta(v, w) = -\delta(w, v)$

$$\delta(v+w, v+w) = \delta(v+w, v) + \delta(v+w, w)$$
$$\overset{\shortparallel}{0} = \delta(v, v) + \delta(w, v) + \delta(v, w) + \delta(w, w)$$
$$0 = \delta(w, v) + \delta(v, w)$$
$$\delta(v, w) = -\delta(w, v) \quad //$$

$\Leftarrow$

$\delta(v, v) = -\delta(v, v)$

$2\delta(v, v) = 0$ se caratt $K \neq 2$ $\Rightarrow 2 \neq 0$

$\Rightarrow \delta(v, v) = 0$ //

))

---

dimostrazione del teorema:

prendiamo V, una base $v_1, \dots, v_n$ di V

e consideriamo:

$$n\text{-LinAlt}(V, K) \longrightarrow K$$
$$\delta \longmapsto \delta(v_1, \dots, v_n) =: ev_{\mathcal{V}}(\delta)$$

osserviamo che è funzione lineare da K

$ev_{\mathcal{V}}(\lambda\delta_1 + \delta_2) = \lambda ev_{\mathcal{V}}(\delta_1) + ev_{\mathcal{V}}(\delta_2)$.

dobbiamo mostrare che è un isomorfismo, cioè biiettiva: cioè dato $\delta(v_1, \dots, v_n) = a \in K$ devo mostrare che c'è una unica δ che vale a su $(v_1, \dots, v_n)$.

cioè devo mostrare che il valore $\delta(v_1, \dots, v_n)$ DETERMINA completamente la funzione δ.

dato δ e date $v_1, \dots, v_n$ base,

siano $u_1, \dots, u_n \in V$ qualsiasi, voglio calcolare

$\delta(u_1, \dots, u_n)$ lo calcolo usando $\delta(v_1, \dots, v_n)$

$(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n) A$ $\quad A \in M_n(K)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\varphi_{\mathcal{V}}(u_1) \dots \varphi_{\mathcal{V}}(u_n))$

$$u_1 = \sum_{i=1}^n a_{i1} v_i$$
$$u_2 = \sum_{i=1}^n a_{i2} v_i$$
$$\vdots$$
$$u_n = \sum_{i=1}^n a_{in} v_i$$

Conseguenza: supponiamo $\delta \in n\text{-LinAlt}(V, K)$, $\delta \neq 0$

allora $\boxed{u_1, \dots, u_n \text{ sono } \underline{\text{l.d.}}_{\text{dip.}} \Rightarrow \delta(u_1, \dots, u_n) = 0}$

(per esempio se $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i$:

$$\delta(u_1, \dots, u_n) = \delta(u_1, u_2, \dots, \sum^{n-1} \lambda_i u_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \delta(u_1, u_2, \dots, u_i) \lambda_i$$
$$= 0 + \dots + 0 = 0.$$

$A \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \Rightarrow \neg B$

viceversa? $\Leftarrow$

$\boxed{\text{se } v_1, \dots, v_n \text{ base} \Rightarrow \delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0}$

(è vero per ogni $\delta \neq 0$ perché se δ calcolato su una base è 0, allora è 0 su ogni singolo di vettori, e quindi $\delta \equiv 0$ ↯)

Morale: $\delta \in n\text{-LinAlt}(V, K)$, $\delta \neq 0$

è un TEST di indip. lineare:

$v_1, \dots, v_n$ base $\Leftrightarrow \delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

CONTO FONDAMENTALE:

$\delta(u_1, u_2, \dots, u_n) =$

$$= \delta(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1 1} v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{j_2 2} v_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^n a_{j_n n} v_{j_n}) =$$
$$= \underbrace{\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n}_{n^n \text{ addendi}} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} \delta(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n})$$

(0 se 2 valori sono uguali $\neq 0$ sse $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$)

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{perm}(\{1, \dots, n\})} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n} \underline{\delta(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)} \dots v_{\sigma(n)})}$$

(permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ $(1, 2, 3 \dots n)$, $(j_1, j_2, j_3 \dots j_n)$)

$$= \left(\sum_{\sigma} (\prod a_{\sigma(i), i}) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)\right) \delta(v_1, v_2, \dots, v_n)$$
$$\shortparallel$$
$$= \underbrace{\det(u_1, \dots, u_n)}_{\text{coefficiente unico}} \cdot \delta(v_1, \dots, v_n)$$

Conseguenze:

① se $\delta_1(v_1 \dots v_n) = \delta_2(v_1 \dots v_n) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2$

(perché $\delta_1(u_1 \dots u_n) = \delta_2(u_1 \dots u_n)$ per ogni $u_1, \dots, u_n \in V$)

quindi $n\text{-LinAlt}(V, K) \to K$ iniettiva

② questa funzione è anche SURGETTIVA perché data una base $v_1, \dots, v_n$ di V usando la funzione

$$\delta(u_1, \dots, u_n) = \det(u_1 \dots u_n) \cdot \underset{\delta(v_1, \dots, v_n)}{1}$$

so per costruzione una funzione multilineare alternante $\neq 0$ (perché $\delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$) //

Definizione di DETERMINANTE:

$\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ $\quad \dim_K(V) = n < \infty$

sia $\delta \in n\text{-LinAlt}(V, K)$

$v_1, \dots, v_n$ base V

$$\det(\varphi) := \frac{\delta(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))}{\delta(v_1, \dots, v_n)}$$

dipende SOLO DA φ, non da δ, non da $v_1, \dots, v_n$

se $A \in M_n(K)$ definiamo

$$\det(A) = \det(\varphi_A) \qquad \varphi_A : K^n \to K^n, \quad \underline{x} \mapsto A\underline{x}$$

e allora

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K$$

è l'unica funzione tale che:

① multilineare sulle colonne di A

② alternante sulle colonne di A

③ vale 1 su I_n $\left(\frac{\delta(v_1, \dots, v_n)}{\delta(v_1, \dots, v_n)} = 1\right)$ //

06/12/2022

Osservazione: $\det(\varphi) = \frac{\delta(\varphi(v_i))}{\delta(v_i)}$ $\quad \varphi : V \to V$, v_i base V, δ n-lineare alt $V^n \to K$, $\delta \neq 0$

$\det(A) = \det(\varphi_A) = \frac{\delta(\text{colonne di } A)}{\delta(\text{base canonica})}$

$\varphi_A : K^n \to K^n$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

n! addendi

(1) $\det(id) = 1$ // $\det(I_n) = 1$

$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi)$ // $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$

dim:

$$\det(\varphi \circ \psi) = \frac{\delta(\varphi \circ \psi(v_i))}{\delta(v_i)} = \frac{\delta(\varphi \circ \underline{\psi(v_i)})}{\underline{\delta(\psi(v_i))}} \cdot \frac{\underline{\delta(\psi(v_i))}}{\delta(v_i)} =$$

se $\psi(v_i)$ base e base, allora $\neq 0$ e abbiamo fatto prima $= \underbrace{\frac{\delta(\varphi(w_i))}{\delta(w_i)}}_{\det(\varphi)} \cdot \det(\psi)$

② $H^{-1}H = I_n \Rightarrow \det(H^{-1}) = \det(H)^{-1}$

perché $\det(H^{-1}H) = \det(I) = 1$

$\det(H^{-1}) \cdot \det(H)$

③ $\det : GL_n(K) \longrightarrow K^\times = K \setminus \{0\}$

$A \longmapsto \det(A)$

è funzione di gruppi moltiplicativi.

$\Rightarrow \det(\det) = \{A \in GL(K) : \det(A) = 1\}$ è SOTTOGRUPPO NORMALE di $GL(K)$ e si chiama $SL_n(K)$ SPECIALE LINEARE

notate: $\det(H^{-1}AH) = \det(A)$

Esempi:

(1) $\det(a) = a$ $\quad |S_1| = 1! = 1$

(2) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det_{\mathcal{V}}$ - diagonale

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{sgn}(id) = 1$ $\quad \mathrm{sgn}(\sigma) = -1$

$|S_2| = 2! = 2$

(3) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

= " 3 dispari - 3 antidispari "

"regola di SARRUS"

(4) $|S_4| = 4! = 24$

Casi facili:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^n a_{jj}$$

perché solo la permutazione identica dà un prodotto non nullo

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i), i} = \prod_{j=1}^n a_{jj}$$

se $\sigma \neq id$ allora c'è $i \neq \sigma(i)$: $\begin{cases} \text{se } \sigma(i) > i & a_{\sigma(i), i} = 0 \\ \text{se } \sigma(i) < i & \text{cerchi } a_{\sigma(j), j} = 0 \end{cases}$

equiv: dobbiamo usare permutazioni con $\sigma(i) \leq i$ altrimenti abbiamo 0,

e: $\sigma(1) \leq 1 \Rightarrow \sigma(1) = 1$

$\sigma(2) \leq 2$ (una $\neq 1$ poi usato) $\Rightarrow \sigma(2) = 2$

$\sigma(3) \leq 3$ (una $\neq 1, 2$ già usati) $\Rightarrow \sigma(3) = 3$

etc.

dunque $\sigma = id$.

⑧ $\det(A) = \det(A^t)$ // $\underline{\det(\varphi^t) = \det(\varphi)}$

$$\sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod a_{\sigma(i), i} = \sum_{\pi = \sigma^{-1}} \mathrm{sgn}(\pi) \prod a_{j, \pi(j)}$$

Sviluppi di Laplace:

(1) Sviluppo rispetto alla prima colonna:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

A_{i1} = matrice ottenuta da A togliendo la riga i e la colonna 1

(2) Sviluppo rispetto alla colonna j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

A_{ij} = matrice ottenuta da A togliendo la riga i e la colonna j

(3) Sviluppo rispetto alla riga i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

A_{ij} = matrice ottenuta da A togliendo la riga i e la colonna j

Dimostrazione:

Sappiamo il fatto che $\det$ è multilineare sulle colonne e alternante sulle colonne:

(1) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\lambda \in K$

$\det(A + B)$?

$\det(A_1 + B, A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n)$

$\det(A_1, \dots, \dots) + \det(B, \dots, \dots) \dots$

$A_1 + B_1$

(2) Le operazioni di Gauss del tipo "sostituire una colonna con la stessa + λ una altra colonna" non cambiano il determinante:

$$\det(A_1 A_2 \dots A_n) = \det(A_1, \underbrace{A_2 + \lambda A_1}_{\det(A_1, A_2 + \lambda A_1, A_3, \dots, A_n) =}, A_3, \dots, A_n)$$
$$\det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \lambda \det(A_1, A_1, A_3, \dots, A_n)$$

Quindi: per calcolare $\det(A)$ possiamo ridurre A in forma triangolare usando SOLO op. gauss 2° tipo:

$A \rightsquigarrow T$

$\det(A) = \det(T) = \prod$ diagonale.

(3) usare Gauss = moltiplichi una a dx/sx per matrici elementari:

$A \rightsquigarrow A_1 = E_1 A$

$\det(A_1) = \det(E_1 A) = \det(E_1)\det(A)$

Quindi è il $\det$ delle matrici elementari?

(1) $\det\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = -1$

(2) $\det\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda$

(3) $\det\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

Problema:

$\sigma \in S_n$: $\quad \mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{ scambi}}$

σ = pacchetto scambi

$$= \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i))$$
$$= \prod_{i<j} (j - i)$$
$$= \det(E)$$

dove E matrice data da $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$

$= (e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \dots e_{\sigma(n)})$ //

07/12/2022