# Riassunto sui determinanti, finora:

$\delta: V \times \cdots \times V \longrightarrow K$ multilineare, $n$-volte $n=\dim V$ — alternante: $\delta(v_1,\dots,v_n)=0$ se $v_i=v_j$ per $i\neq j$ — normalizzata: $\delta(e_1,\dots,e_n)=1$ per una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ di $V$

$n\text{-Multilin}(V,K) = \{\delta : V^n \to K : n\text{-Multilin.}\}$ è spazio vettoriale e ha dim $=1$.

$n\text{-Alt}(V,K) \longrightarrow K$, $\delta \longmapsto \delta(v_1,\dots,v_n)$ (dove $v_1,\dots,v_n$ è BASE di $V$) è isomorfismo.

unicità: $\forall (u_1,\dots,u_n)\in V$: $\delta(u_1,\dots,u_n) = \Big(\underbrace{\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)}}_{\det(A)}\Big)\delta(e_1,\dots,e_n)$

$(u_1,\dots,u_n) = (v_1,\dots,v_n)A$, $(a_{ij})=A=\big(e_j(u_i)\big)_{ij}$, $e_j(u_i)=a_{ij}$

Strutture: $\delta$ è equivalente $\Leftrightarrow$ test del indip. lineare:

$\delta(v_1,\dots,v_n)\neq 0$ sse $v_1,\dots,v_n$ base $V$

$\delta(v_1,\dots,v_n)=0$ sse $v_1,\dots,v_n$ sono lin. dip.

**def**: $\det(\varphi) = \dfrac{\delta(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))}{\delta(v_1,\dots,v_n)}$ dove $v_1,\dots,v_n$ base $V$, $\delta\neq 0$, $n$-Alt$(V,K)$, dipende solo da $\varphi$ e non da $\delta$, $v_1,\dots,v_n$.

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}}$$

unica funzione $M_n(K) \longrightarrow K$, $A \longmapsto \det(A)$ che è $n$-multilineare e alternante sulle colonne di $A$, normalizzata sulle colonne di $A$, $\det(E_n)=1$.

$\Rightarrow$ $\det(A)=1$

$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

dim: la vedo da fuori dalla teoria, faccio sulla definizione:

$$\det(\psi\circ\varphi) = \frac{\delta(\psi(\varphi(v_1)),\dots,\psi(\varphi(v_n)))}{\delta(v_1,\dots,v_n)} = \frac{\delta(\psi(\varphi(v_1)),\dots,\psi(\varphi(v_n)))}{\delta(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))}\cdot\frac{\delta(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))}{\delta(v_1,\dots,v_n)} = \det(\psi)\det(\varphi)$$

(n) $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\big(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}\big)$

(2) 1,1,2,3 $\quad S_2 = \{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\}$

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \underbrace{(a_{11}a_{22})}_{\sigma=id} - \underbrace{(a_{12}a_{21})}_{\sigma=(12)}$

(3) ....

$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} = a_{11}\cdots a_{nn}$

$\sigma(i)\neq i \Rightarrow a_{\sigma(i)i}=0$

perciò $\sigma$ devono essere $\prod \neq 0$?

$\sigma(1)\leq 1 \Rightarrow \sigma(1)=1$

$\sigma(2)\leq 2 \Rightarrow \sigma(2)=2$

$\vdots$

la unica usare $\sigma$ tale che $\boxed{\sigma(i)\leq i}$

$a_{\sigma(i)i}$

---

## Determinanti a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * \\ 0 & \boxed{A_2}\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det(A_1)\cdot\det(A_2)$$

$A \in M_n(K)$, $A_1\in M_n(K)$, $A_2\in M_n(K)$, $n_1+n_2=n$

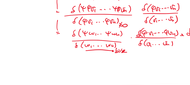
$$\det\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & * \\ 0 & \boxed{A_2}\end{pmatrix} = \prod \det A_i$$

$$\det\begin{pmatrix} \square & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \square\end{pmatrix}$$

mappa cercando sulla formula delle permutazioni:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

ma alcuni termini sono certamente nulli perché se $\sigma$ manda un elemento $\in\{1,\dots,n_1\}$ in $\sigma(i)>n_1$ allora manda un elemento $\in\{n_1+1,\dots,n\}$ in $\sigma(i)\leq n_1$



$$= \sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(\{1,\dots,n_1\})=\{1,\dots,n_1\}\\ \sigma(\{n_1+1,\dots,n\})=\{n_1+1,\dots,n\}}} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma_1\in S_{\{1,\dots,n_1\}}\\ \sigma_2\in S_{\{n_1+1,\dots,n\}}}} \operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2)\prod_{i=1}^{n_1} a_{\sigma_1(i)i}\prod_{j=n_1+1}^{n} a_{\sigma_2(j)j}$$

$$= \Big(\sum_{\sigma_1} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\prod a_{\sigma_1(i)i}\Big)\Big(\sum_{\sigma_2}\operatorname{sgn}(\sigma_2)\prod a_{\sigma_2(j)j}\Big)$$

$$= \det(A_1)\det(A_2)$$

$$\boxed{\Big(\sum_i \alpha_i\Big)\Big(\sum_j \beta_j\Big) = \sum_{i,j}\alpha_i\beta_j}$$

---

## Determinante di Van der Monde:

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n\end{pmatrix}}_{\mathrm{Vdm}} = \prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

$\mathrm{Vdm}(x_0,\dots,x_n)$

in particolare $\mathrm{Vdm}(x_0,\dots,x_n)=0$ sse $x_i=x_j$ per qualche $i\neq j$

Lemma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\\ x_0^2 & x_1^2 & & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_1-x_0 & & x_n-x_0\\ 0 & x_1^2-x_0x_1 & & x_n^2-x_0x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_1^n-x_0x_1^{n-1} & & x_n^n-x_0x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$I \times I$, $I \times E$, $E \times I$, $E \times E$

equivalente a $x_0$ precedente

$$\det(\mathrm{Vdm}(x_0,\dots,x_n)) = \det\Big(\boxed{\phantom{x}}\Big)$$

$$= \det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & \cdots & x_n-x_0\\ x_1(x_1-x_0) & \cdots & x_n(x_n-x_0)\\ \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1}(x_1-x_0) & & x_n^{n-1}(x_n-x_0)\end{pmatrix}$$

$$= (x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1\\ x_1 & \cdots & x_n\\ \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i>0}(x_i-x_0)\cdot\mathrm{Vdm}(x_1,\dots,x_n)$$

$\vdots$ per induzione su $n$, ripeto per ITERAZIONE

$$= \prod_{i>0}(x_i-x_0)\prod_{i>1}(x_i-x_1)\cdots\prod\cdots$$

$$= \prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

---

## Sviluppi di Laplace (e applicazioni a
- matrici inverse
- sistemi secondo CRAMER)

Secondo la $i$-esima riga:

$$\det(a_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})$$

$i$-esima $(a_{i1},\dots,a_{in})$

dove $A_{ij}$ = matrice che si ottiene da $A$ cancellando la $i$-esima riga e la $j$-esima colonna.

Secondo la $j$-esima colonna:

$$\det(a_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})$$

Come si possono dimostrare queste formule?

(1) basta usarlo per le colonne (per trasposti: OK)

(2) "base" per la prima colonna

(3) → usiamo che la formula di Laplace è una funzione multilineare alternante e vale $1$ su $E_n$.

→ oppure usiamo che la formula di Laplace dà l'$\det$ soddisfa per la formula nota con la permutazioni.

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod a_{\sigma(i)i} = \det(A)$$

Laplace (1ª colonna)

$a_{11}$ $*$ $\sigma(1)=1$

$a_{21}$ $*$ $\sigma(1)=2$

$a_{31}$ $*$ $\sigma(1)=3$

$$= \sum_{\sigma(1)=1} a_{11}(\ \ ) + \sum_{\sigma(1)=2} a_{21}(\ \ ) + \sum_{\sigma(1)=3} a_{31}(\ \ ) \cdots + \sum_{\sigma(1)=n} a_{n1}(\ \ )$$

$$= a_{11}\Big(\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\prod a_{\sigma(i)i}\Big) + a_{21}\Big(\sum_{\sigma(1)=2}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod a_{\sigma(i)i}\Big)$$

$\det(A_{11})$

$\sigma: \{1,2,3\cdots n\} \to \{1,2,3\cdots n\}$

$\sigma_1: \{2,3\cdots n\} \to \{1,3,\dots,n\}$

$\operatorname{sgn}(\sigma)$ ? $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\cdots n\\ 2&\sigma(2)&\sigma(3)\cdots\sigma(n)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&3\cdots n\\ \sigma(2)&\sigma(3)\cdots\sigma(n)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&\cdots n\\ 1&\sigma(2)&\cdots\sigma(n)\end{pmatrix}$

$\sigma_1$

$(-1)^{2+1}$

$\sigma_1: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$

$\begin{pmatrix}1&2&\cdots n\\ 2&\sigma(2)&\cdots\sigma(n)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&\cdots n\\ 1&2-\sigma(2)&\cdots n\end{pmatrix}$

$(-1)^{1+2} = (-1)^{3+1}$

$i=2$

---

## Sviluppi alcuni e calcolo delle matrici inverse:

**prop**: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\underline{\det(A_{ij})}$

$i^{\text{ma}}$ riga

dimostrazione:

$$\boxed{\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})} \begin{cases}\det(A) & \text{se } i=i\\ 0 & \text{se } i\neq i\end{cases}$$

sviluppo alcuni — sviluppo alcuni

(sviluppi alcuni)

è sviluppo di Laplace della matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$$

La formula precedente si scrive in particolare di 2 modi:

$$\Big(a_{ij}\Big)\Big((-1)^{i+j}\det(A_{ij})\Big)^t = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A)\end{pmatrix} = \det(A)\,I_n$$

$$i \begin{pmatrix} \cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$

**Def**: se $A\in M_n(K)$ chiamiamo matrice dei COFATTORI Aggiunti o (matr. AGGIUNTA) di $A$

$$A^C = \Big((-1)^{i+j}\det(A_{ji})\Big)_{ij}$$

allora $AA^C = \det(A)\,I_n$

$$\boxed{\text{in particolare se } \det(A)\neq 0\text{, cioè se } A\in GL_n(K) \text{ (invertibile)}\quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^C}$$

12/12/2022

---

**Riassunto**: $\det(\varphi) = \dfrac{\delta(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))}{\delta(v_1,\dots,v_n)}$ $\quad \varphi: V\to V$, $\dim V = n$, $\delta \in n$-Multilin, $\delta\neq 0$, $v_1,\dots,v_n$ base $V$

$\det(A) = \det(\varphi_A) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod a_{\sigma(i)i}$ (FORMULA)

$(\varphi_A: K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax)$

$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})$ (sviluppo riga $i$)

(Cauchy) $= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij})$ (sviluppo colonna $j$)

In generale:

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(A_{ij}) = \begin{cases}\det(A) & \text{se } i=i\\ 0 & \text{se } i\neq i\end{cases}$$

cioè: $A = (a_{ij})_{ij}$, $A^C = \Big((-1)^{i+j}\det(A_{ji})\Big)_{ij}$

allora $\boxed{AA^C = \begin{pmatrix}\det A & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \det A\end{pmatrix} = \det(A)\cdot I_n}$

dunque $\det(A)\neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A^C$

**Problemi**: $A \rightsquigarrow A^C$

$\operatorname{rg}(A^C) = \begin{cases} n & \text{se } \operatorname{rg}(A)=n\\ 1 & \text{se } \operatorname{rg}(A)=n-1\\ 0 & \text{se } \operatorname{rg}(A)<n-1\end{cases}$

$\det(A^C)$

$A^C \rightsquigarrow (A^C)^C$ cosa cambia con la matrice $A$ iniziale?

---

## Risoluzione dei sistemi quadrati di CRAMER:

$AX = b$, $A\in GL_n(K)$, $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

e da sia $A\in GL_n(K)$:

unica soluzione: $A^{-1}(AX) = A^{-1}b$, $X = A^{-1}b$

come applicare questa soluzione?

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\big(A^C\big)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\det(A)}\big(\text{riga } i\text{-esima di } A^C\big)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}\det(A_{ji})\,b_j$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\det(A_i)$$

$$A^C = \Big((-1)^{i+j}\det(A_{ji})\Big)_{ij} = \Big((-1)^{i+j}\det(A_j^t)\Big)_{ij}$$

Sviluppo di Laplace:

$$\begin{pmatrix} A & \begin{matrix}b\\ \vdots\\ b\end{matrix} & A\end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}$$

il punto dei vettori di $x_i$ sostituendo $i$-esimo

$A_i = \{$ matrice ottenuta da $A$ sui cui si pone tutte $i$-esima colonna con $b$ ; termini noti $\}$

---

Sia $A\in M_{n,m}(K)$

**Definizione**: MINORI di $A$ di ORDINE $s$ sono i determinanti delle sottomatrici quadrate di ordine $s$ di $A$.

Notare: i minori (oppure) del ordine $s$ sono $\binom{m}{s}\binom{n}{s}$ se $A\in M_n(K)$ = $\binom{n}{s}^2$ se $A\in K$

Matrice che si ottiene da $A$ togliendo alcune righe e alcune colonne.

**Teorema**: $\operatorname{rg}(A)\geq s$ sse $A$ possiede minori invertibili di ordine $s$

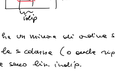
$\operatorname{rg}(A)=r$ sse $\exists$ minore d'ordine $r$ $\neq 0$ $\forall$ minore d'ordine $>r$ $=0$

sse $\exists$ minore d'ordine $r$ $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\forall$ minore d'ordine $r+1$ è $=0$

- sviluppi Laplace: $\det$ ordine $>r+1$ si calcolano come $\sum$ det del ordine $r+1$

Principio dei MINORI ORLANTI: $\operatorname{rg}(A)=r$ $\Rightarrow$ $\exists$ minore d'ordine $r$ $\neq 0$ $\forall$ minore d'ordine $r+1$ ottenuto "orlando" il proc. (con opportune e ed aggiunta) $=0$.

(⇒) se $\operatorname{rg} A\geq s$ allora ci sono almeno $s$ colonne indipendenti quelle $s$ colonne hanno almeno $s$ righe indip. ⇒ abbiamo una minore di ordine $s$ $\neq 0$.



(⇐) se $A$ ha un minore di ordine $s$ che è $\neq 0$ allora le $s$ colonne (o anche righe) di quel minore sono lin. indip.



$\sum \lambda_i A_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

$\sum \lambda_i A_i = 0$

↑ minore invertibile GRANDE, fa da la matrice $\square$ ha $\det\neq 0$, invertibile

**Esempio**: calcoliamo le equazioni cartesiane del sottospazio

$$\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \leq K^4$$

dim $=2$ (equazioni cart $4-2=2$)

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle \text{ sse } \operatorname{rg}\begin{pmatrix}x_1 & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 0\\ x_3 & 1 & 0\\ x_4 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x_1 & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 0\\ x_3 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\begin{vmatrix}x_1 & 0\\ x_2 & 0\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0\\ \begin{vmatrix}x_1 & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 0\\ x_4 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\begin{vmatrix}x_1 & 0\\ x_2 & 0\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0\\ \begin{vmatrix}x_1 & 1 & 0\\ x_2 & 1 & 0\\ x_3 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0\\ \begin{vmatrix}x_1 & 1 & 0\\ x_2 & 1 & 0\\ x_4 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0\\ \begin{vmatrix}x_1 & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 0\\ x_4 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0\end{cases}$$

Siccome può avere rango è $\neq 0$

Isolando:

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x_1 & \square & 0\\ x_2 & \square & 0\\ x_3 & \square & 0\end{vmatrix} = 0 & \text{(} \square x_3 \text{, non } x_4 \text{ ...}\\ \begin{vmatrix}x_1 & \square & 0\\ x_2 & \square & 0\\ x_4 & \square & 1\end{vmatrix} = 0 & \text{(} \square x_4 \text{, non } x_3 \text{ ...}\end{cases}$$

per rango 2.

**Problema**: se $A\in M_{n,m}(K)$

$A'$ sottomatrice quadrata d'ordine $r$ di $A$ con invertibile $\neq 0$

e tutti i minori orlati di $A'$ sono nulli

allora $\operatorname{rg}(A)=r$

(supponiamo: tolte le altre colonne della matrice sono lin. dip. dalle colonne di $A'$).

12/12/2022

---

Nota: per calcolare le equazioni cartesiane, conviene:

"eliminare i parametri"

oppure

"usare i determinanti del principio minori orlati"?

dipende, una dei dato è meglio avere dato tutte le equaz.