Scopo: • trovare per ogni endomorfismo dato una sua forma più semplice possibile (in un certo senso) • specificare quale è il nostro "modello canonico" di "semplicità" e per ogni classe trovare un rappresentante di tale semplice possibile.

Strutturiamo due casi:

(1) $\varphi: V \to V$, modello canonico: $\boxed{\text{DIAGONALE}}$

(2) $\varphi: V \to V$, modello canonico: $\boxed{\text{SUPERIORE}}$

Se $\varphi: V \to W$ e $\mathcal{B}$ base V $\mathcal{C}$ base W $\Rightarrow$ $d_{\varphi,\mathcal{B}}(v) \in M_{m,n}(K)$ $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

e $\mathcal{B}'$ base V $\mathcal{C}'$ base W $\Rightarrow$ $d_{\varphi,\mathcal{B}'}(v) = d_{id_W \circ \varphi \circ id_V,\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(v) = d_{id_W,\mathcal{C},\mathcal{C}'} \cdot d_{\varphi,\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot d_{id_V,\mathcal{B}',\mathcal{B}}(v)$

$GL(n) \ni d_{id_V,\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, $V \xrightarrow{id_V} V$, $v \mapsto v$; $GL(m) \ni d_{id_W,\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $W \xrightarrow{id_W} W$, $w \mapsto w$

$\boxed{\text{Dunque } A, B \in M_{m,n}(K) \text{ saranno da stessa } \varphi \text{ se esistono } B = Q A P \text{ con } Q \in GL_m(K),\ P \in GL_n(K)}$

Problema: data φ cercare basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ tali che $d_{\varphi,\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$ sia "più semplice possibile"

dato A cercare P, Q invertibili tali che QAP sia "più semplice possibile".

Def: $A, B \in M_n(K)$ $A \sim B$ se $B = P^{-1}AP$ per $P \in GL_n(K)$

Prop: $A \sim B$ $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi \in End(V)$, $\exists \mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di V tali che $d_{\varphi,\mathcal{B}}(\varphi) = A$, $d_{\varphi,\mathcal{C}}(\varphi) = B$

Nota: $\sim$ è relazione di equivalenza cioè $A \sim A$; $A \sim B \Rightarrow B \sim A$; $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Problema: studiare l'insieme quoziente $M_n(K)/_{\sim}$

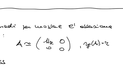
"problemi di classificazione":
① cosa sono gli elementi di $M_n(K)/_{\sim}$
② dato A trovare $[A]_{\sim}$
③ dato A e B capire se $A \sim B$

Teorema (di classificazione):
$A \in M_n(K)$ allora $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dove $\lambda_i = \lambda_j(A)$
e in particolare:
$A \sim B \Leftrightarrow sp(A) = sp(B)$
e dunque
$M_n(K)/_{\sim} \xleftrightarrow{\Psi} \{0, 1, 2, \dots, n\}$
$\Psi(A) = sp(A)$ è l'unica immagine che dà una corrispondenza biunivoca

Notate: $\emptyset \sim \emptyset$, $\{0\} \sim \{0\}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ (matrici nilpotenti) $\subset M_n(K)$

Ci siamo dunque ridotti per risolvere il problema iniziale a una nota:

(1) usando Jordan



(2) $\varphi: V \to V$

Vogliamo una base di V a una base di W in modo che $d_{\varphi,\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Scriviamo $V = V' \oplus \ker(\varphi)$ usiamo una base $\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_r}_{V'}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\ker \varphi}$ $(n = \dim V)$

per $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_r)$ sono linearmente indipendenti $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ $(n = \dim W)$

In questo caso $d_{\varphi,\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Infatti: $\varphi(v_1) = w_1 + 0 w_2 + \dots + 0 w_n$
$\varphi(v_2) = w_2 + 0 w_1 + \dots$
$\varphi(v_r) = 0$
$\varphi(v_n) = 0$

Problema: equivalenza tra basi / matrici:

$A \underset{Q}{\sim} B$ se $B = QA$ per $Q \in GL$ (solo cambio base codominio)

$A \underset{P}{\sim} B$ se $B = AP$ con $P \in GL$ (solo cambio base dominio)

Sono relazioni di equivalenza? Come descrivo le classi $M_{m,n}(K)/_{\underset{Q}{\sim}}$, $M_{m,n}(K)/_{\underset{P}{\sim}}$

Nel caso $\varphi: V \to V$

$d_{\varphi,\mathcal{C}}(\varphi) = P^{-1} d_{\varphi,\mathcal{B}}(\varphi) P$ $\quad P \in GL_n(K) = d_{id_V,\mathcal{C},\mathcal{B}}(id_V)$

$\boxed{\text{Due matrici } A, B \in GL(K) \text{ sono simili } A \sim B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP \text{ per } P \in GL(K)}$

Se mappe da stessa endomorfismo un'base relativa (scelta una dominio e codominio)

$A \sim B \Rightarrow A \underset{P}{\sim} B$

$(A \sim B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP = QAP \Rightarrow A \underset{Q}{\sim} B)$

Esercizio: $[GL]_{\sim} = \{[B] \mid B \in GL\}$ $\{$classi di equivalenza$\}$ $\{$matrici basiche$\}$

$[\mathbb{1}_n]_{\sim} = \{P^{-1}\mathbb{1}_n P \mid P \in GL(n)\} = \{\mathbb{1}_n\}$

$[\mathbb{0}_n]_{\sim} = \{P^{-1}\mathbb{0}_n P \mid P \in GL(n)\} = \{\mathbb{0}_n\}$

$S = \{\mathbb{1}_n, \mathbb{0}_n\} \Rightarrow S \sim \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & \mathbb{0}_{n-r} \end{pmatrix}$

18/12/2022

Def: A, B "simili" se $B = P^{-1}AP$ $A, B \in GL(K)$ per qualche $P \in GL(K)$

$\Leftrightarrow$ $A \in B$ appartengono alla stessa classe di equivalenza $(K^{n \times n}/\sim)$ se sono tali di Jordan (non stesse tali in forma canonica)

Nota: $\exists$ algebrica di K.

Nota: è problema difficile fare la classificazione per $\sim$, la finezza sui casi sui polinomi

Dare casi particolari:

① $A \in$ TRIANGOLARE SUPERIORE $\Leftrightarrow$ $\exists P \in GL(n): P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ se esiste una base di K^n tale che la funzione lineare φ_A invariante stabile la bandiera della base $\{\langle v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \dots, \langle v_1, \dots, v_n \rangle\}$ $\forall i \in 1, \dots, n$ $\dim \langle v_1, \dots, v_i \rangle = i$

② $A \in$ DIAGONALE $\Leftrightarrow$ $\exists P \in GL(n): P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ se $\exists$ base di K^n tale che φ_A manda ciascun vettore di base in un multiplo di se.

Strategia: data $\varphi: V \to V$ (spazio $A \in GL(n)$, $\varphi_A: K^n \to K^n$)

cerchiamo se esistono vettori $v \in V$ tali che $\boxed{\varphi(v) = \lambda v \text{ per qualche } \lambda \in K}$.

Questo è un problema lineare:

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ incognite sono x_i, λ.

Def: un tale $\lambda \in K$ con $\varphi(v) = \lambda v$ si dice AUTOVALORE di φ $(\lambda \in K)$ EIGENVALUE

un tale v tale che $\exists \lambda \in K$ con $\varphi(v) = \lambda v$ si dice AUTOVETTORE di φ $(v \in V)$ EIGENVECTOR

Def: $p_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A)$ si dice polinomio caratteristico di A

$p_\varphi(x) = \det(x\mathbb{1} - \varphi)$ è polinomio caratteristico di φ

Teo: autovalori di φ $(\lambda \in K)$ sono proprio tutte quelle $\varphi_A(x)$ $(p_A(x))$, dunque sono un numero finito.

$\boxed{\text{Il numero degli autovalori} \leq \text{grado di } p_A(x)}$

Dato la matrice A, calcoliamo prima controllando $\lambda \in K$ cercare tutte quelle $p_A(\lambda)$, allora, proviamo a trovare quei vettori di v tali $(\varphi - \lambda id)$ cioè risolviamo il sistema di Cramer

$(A - \lambda \mathbb{1})\underset{\text{incognita}}{\underset{\uparrow}{\underline{x}}} = \underline{0}$

Studiamo il polinomio caratteristico:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} =$
$= (x-1)(x-3) - 2 = x^2 - 3x + 2 =$
$= x^2 - 3x$
$= x(x-3)$ autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$

$A - 0\mathbb{1} = A$ ha rango $= 2$ (autovalore di 0) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$
$A - 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango $= 1$ (autovalore di 3) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono tra $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ base

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)^2 \cdot (x-2)$ autovalore solo $\lambda = 3$ (molteplicità tre 3)

$\ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

non posso trovare una base di autovettori.

Proprietà del polinomio caratteristico:

$p_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A)$

① questo polinomio è indipendente da P:

$B = P^{-1}AP$: $p_B(x) = |x\mathbb{1} - B|$
$= |x\mathbb{1} - P^{-1}AP|$
$= |P^{-1}(x\mathbb{1})P - P^{-1}AP|$
$= |P^{-1}(x\mathbb{1} - A)P|$
$= |P^{-1}| \cdot |x\mathbb{1} - A| \cdot |P|$
$= p_A(x)$

Ci particolare tutti i coefficienti di $p_A(x)$ sono invarianti per coniugazione.

② $p_A(x)$ è polinomio di grado n monico (cioè $x^n + \dots$)
$\det(x\mathbb{1} - A)$ Sicuramente vale $(-1)^n \det(A) + \det(xI) + p_A(0)$
coefficiente di x^{n-1}

$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ sia pure $\sum_{i=1}^{n} (x - a_{ii}) + x^{n-2}(\ldots) + \dots + (\ldots)x + \det(A)$

$\boxed{\Sigma a_{ii} = Tr(A)}$ TRACCIA DI A.

21/12/2022

Ripasso: $\boxed{\text{Sempre vale } (A, B \in M_n(K))}$
$A \underset{Q}{\sim} B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP$ con $P \in GL(K)$

- A triangolare $\Rightarrow A \underset{Q}{\sim}$ triangolare $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
- A diagonale $\Rightarrow A \underset{Q}{\sim}$ diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Strategia: cercare vettori $\underset{\text{ha}}{v}$ tali che $A v = \underset{\text{autovalore}}{\lambda} \underset{\text{autovettore}}{v}$.

Osservazione:

$\exists v \neq 0$ t.c. $\varphi(v) = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(v) - \lambda v = 0$
$\Leftrightarrow$ $(\varphi - \lambda id) v = 0$
$\Leftrightarrow$ $\ker(\varphi - \lambda id) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\det(\varphi - \lambda id) = 0$
$\Leftrightarrow$ $\det(x\mathbb{1} - A) = 0$
$\Leftrightarrow$ λ è zero del polinomio $\det(x\mathbb{1} - A)$
$\Leftrightarrow$ $\det(x\mathbb{1} - A) = 0$
$\Leftrightarrow$ λ è zero del polinomio caratteristico

polinomio caratteristico di A $(p_A(x))$.

Nota: $\boxed{p_A(x) = \det(x\mathbb{1} - A)}$ $\det(A - x\mathbb{1}) = (-1)^n p_A(x)$

Proprietà polinomio caratt.:

(1) $A \underset{Q}{\sim} B \Rightarrow p_A(x) = p_B(x)$

$\not\Leftarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$p_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$, $p_B(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$
$\ker(A(0) - 0\mathbb{1}) = \langle e_1 \rangle$; $\ker(A(0) - 0\mathbb{1}) = \langle e_1, e_2 \rangle$
sono di dimensione diversa.

(2) tutti i coeff del polinomio caratteristico sono invarianti per $\underset{Q}{\sim}$

$\det(x\mathbb{1} - A)$
$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix} = x^n + (\ \ )x^{n-1} + \dots + (\ \ )x + (\ \ )$

$(-1)^n \det(A)$

$(-\Sigma a_{ii})$
$Tr(A) = \Sigma a_{ii}$
$Tr: M_n(K) \to K$
$A \mapsto \Sigma a_{ii} \in K$
proprietà?
Linear?
$Tr(A+B) = \Sigma(A)+\Sigma(B)$
$Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
$\ker(Tr) = \{\text{matrici a traccia } 0\}$

$x \cdot 0$ è autovalore di A
Se $y = 0$ è zero $p_A(x)$
Sia $\det(A) = 0$ (basta sono $= 0$)

$(\det(AB) = \det(A)\det(B))$

cosa sono i coeff di x^{n-1} nel pol. caratteristico?
(= a meno del segno è la somma $\sum$ termini principali di x^{n-1} della A
det di sottomatrici che si ottengono cancellando per ogni riga e colonna un elem.)

Criterio (Esame del diagonalizzabilità):

A diagonalizzabile (φ diagonalizzabile) $\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ base di autovettori.

Dimostra una base di autovettori.

Nota: se $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori relativi ad autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\boxed{\text{DISTINTI}}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ allora $v_1, \dots, v_n$ sono $\boxed{\text{LIN. INDIP.}}$ (autovettori relativi ad autovalori $\neq$ sono LI) (in sistema ortogonale)

(Esercizio: $v_1, \dots, v_n \in V$ sono LI) (sistema ortogonale)
cioè $\forall i = 1, \dots, n$ $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

se $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ $\quad$ (Sappiamo $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i$ indice di λ (autovettori))

allora $\varphi^2(\sum \lambda_i v_i) = 0$
$\sum \lambda_i \varphi(v_i) = 0$
$\sum \lambda_i \lambda_i v_i = 0$
allora $\varphi^3(\sum \lambda_i v_i) = 0$
$\sum \lambda_i^2 \lambda_i v_i = 0$
$\vdots$
$\varphi^n(\sum \lambda_i v_i) = 0$
$\sum \lambda_i^n \lambda_i v_i = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

VALE, dato $\neq 0$
Vuole $\det(\ldots) \neq 0$
$\Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i$

Conclusione: se una matrice A ha n autovalori distinti in K, allora è diagonalizzabile.

infatti per ogni autovalore trovo un autovettore $\neq 0$, sicuro n vettori LIN. INDIP., quindi ho una BASE di AUTOVETTORI.

Manda: φ polinomio del diagonalizzabile dipendono dai 2 intermedi:
① se vuoi φ basta per autovettori in K
② se ci sono autovettori INTERI in K

CRITERIO DI TRIANGOLARIZZABILITÀ:

Una matrice $\varphi: V \to V$ (o una matrice $A \in M_n(K)$)
$\Leftrightarrow$ TRIANGOLARIZZABILE se $\exists \mathcal{B}$ base
ha TUTTI gli autovalori in K.
($\Leftarrow$ il polinomio caratteristico si fattorizza in K per fattori LINEARI)
$p_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$ $\quad \lambda_i \in K$ non necessariamente distinti.

$\Leftarrow$ se $A \underset{Q}{\sim} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$

allora $p_A(x) = p_T(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$ è fattorizzato in K.

$\Rightarrow$ si fanno fare un λ vettori: $\underset{\text{funzione } \varphi: V \to V}{\underset{\text{lineare}}{\underset{\text{su}}{\underset{\text{spazio}}{A \in M_n(K)}}}}$

Usando la induzione:
Siano una $A \in M_n(K)$ $p_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$ $\lambda_i \in K$
allora vuoleremo $\exists v$ autovettore di λ_1.
$\in$ base $\{A - \lambda_1 \mathbb{1} \in K^n$
completiamo a una base $\{v_1 = v, v_2, \dots, v_n$
allora $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ $\quad A_1 \in M_{n-1}(K)$
$H = (C \in M_n(K))$ $\quad H^{-1}AH = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$
Ma $p_A(x) = p_{A_1}(x) \cdot (x - \lambda_1)$ $\underset{\text{induzione}}{\Rightarrow}$ $p_{A_1}(x) = \prod_{i=2}^{n} (x - \lambda_i)$
$\prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$
Cioè A_1 è diagonalizzabile
ha tutti gli autovalori in K.
per ipotesi induzione ($\leq n$) abbiamo $A_1 \in$ triangolare cioè $H_1^{-1}A_1H_1 = T_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ con $H_1 \in GL_{n-1}(K)$

$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1^{-1} \end{pmatrix}}_{H_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix}}_{H_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & H_1^{-1}A_1H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$

Problema: Stabilire l'diagonalizzabilità dipende da fattori per $P: V \to V$:

Sogno: $\boxed{\text{Se } \varphi \text{ ha } (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \Rightarrow \varphi \text{ diagonalizzabile}}$

$\varphi: V \xrightarrow{\text{sia}} V$, $\varphi(v) = \lambda_1 v$
$\varphi(\varphi(v)) = \lambda_2 v$
$\varphi: V \to V$, $\varphi(v) = \lambda v$
$\varphi(\varphi(v)) = \lambda^2 v$

$\varphi: V_{\langle \lambda_1 \rangle} \to V_{\langle \lambda_1 \rangle}$
$[v] \mapsto [\varphi(v)] = \lambda_1 [v]$
$\varphi_{|V_{\langle \lambda_1 \rangle}}$ ha un unico λ_1

$\varphi_{|V_{\langle \lambda_1 \rangle}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ $\quad p_{\varphi_{|V_{\langle \lambda_1 \rangle}}}(x) = p_{A_1}$

Nota: $\varphi: V \to V$
$\varphi(v) = \lambda_1 v$ $\quad$ def $(v) \Rightarrow \lambda_1 v = \varphi(v)$
allora $V \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\varphi} V_{\langle \lambda_1 \rangle}$
Dimostriamo perché $\ker(\varphi - \varphi) = \langle v \rangle$
$\varphi: V_{\langle \lambda_1 \rangle} \to V_{\langle \lambda_1 \rangle}$
$[v] \mapsto [\varphi(v)] = \varphi([v])$ $\quad$ $\boxed{\text{non dipende}}$
se $v_1, v_2, \dots, v_n$ base di V
allora $[v_2], \dots, [v_n]$ base di $V_{\langle \lambda_1 \rangle}$
e
$\varphi([v_2]) = [\varphi(v_2)]$
$= [a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n]$
$= a_{12}[v_2] + a_{13}[v_3] + \dots + a_{1n}[v_n]$
$[v_2]$ è vettore $\neq$ cioè $\langle \text{cosa} \rangle$ dato sottospazio di A dimensionale $\dim(V)$ problema!

Triangolarizzabile non diagonalizzabile:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ sia triangolare $\boxed{\text{non è diagonalizzabile}}$

Non triangolarizzabile su $\mathbb{R}$:

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & x-\cos\theta \end{vmatrix}$
$= (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$
$= x^2 - 2\cos\theta + 1$
$x_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$
$= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \in \mathbb{C}$
$\notin \mathbb{R}$.

Conclusione $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ è $\boxed{\text{non diag. } \in \mathbb{R}}$, ma non è $\in \mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{autovalori}}$

$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases}$ $\quad$ $(x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
sono vettori di rotazione del piano

Nota: $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$?

Definizione: $A \in M_n(K)$ (spazio $\varphi \in End_K(V)$)

Sia λ autovalore di A (λ di φ)
Indichiamo la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ per A (λ per φ)
$m_A(\lambda)$
MOLTEPLICITÀ come zero di $p_A(x)$
(massimo) $m \in \mathbb{N}$ tale che $(x - \lambda)^m \mid p_A(x)$
$(x - \lambda)^m \nmid p_A(x)$
$\Leftrightarrow$ (sostituisco m tale che $p_A(\lambda) = (x - \lambda)^m q(x)$
$q(\lambda) \neq 0$)
(= molteplicità di λ per A)

Nota: se $p_A(x)$ ha tutti gli zeri in K, allora $\sum$ molteplicità algebriche $= n$ = grado polinomio

Definizione: $A \in M_n(K)$ $(\varphi \in End_K(V))$

λ autovalore di A
Consideriamo $V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda \mathbb{1}) \subset K^n$ $(\subseteq V)$
AUTOSPAZIO di λ per A

Indichiamo la GEOMETRICA di λ per A $= m_G(\lambda)$
$\dim_K(V_\lambda(A))$

MOLTEPLICITÀ di λ per
(dimensione del sottospazio di autovettori)
(spazio AUTOVETTORI LIN. INDIP.)

$\boxed{\text{molt. alg.} = \text{molteplicità}} = m_A(\lambda) = m_\varphi(\lambda)$
$\boxed{\text{molt. geom.} = \text{molteplicità}} = m_G(\lambda) = m_\varphi(\lambda)$

Disuguaglianza fondamentale:

Per ogni autovalore λ di A:

$1 \leq m_G(\lambda) \leq m(\lambda)$

ovvero: λ autovalore, $\exists$ $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{1})$ $\dim(\ker(A - \lambda \mathbb{1})) \geq 1$.

Idea: $m(\lambda) = \dim(V_\lambda(A))$ $\ker(A - \lambda \mathbb{1})$

Devo fare
$v_1, \dots, v_{m(\lambda)}$ di $V_\lambda(A) \subset K^n$
completo
$v_1, \dots, v_{m(\lambda)}, \dots, v_n$ base K^n
mi piacerebbe fare che matrice A diagonale.

$A \sim \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_{m(\lambda)} & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$

Quindi $p_A(x) = (x - \lambda)^{m(\lambda)} p_{A'}(x)$
Quindi $m_A(\lambda) \geq m(\lambda)$

Nota: fare esercizio $\leq$:
esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$
$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2$ $\quad m(\lambda) = 2$
$V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda \mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
$m(\lambda) = 1 < 2$

esempi:
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad m(\lambda) = 3$, $m(0) = 1$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad m(\lambda) = 3$, $m(0) = 2$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad m(\lambda) = 2$, $m(0) = 0$, $m(0) = 2$

Primo criterio di diagonalizzabilità:

$A \in M_n(K)$ $(\varphi \in End_K(V))$

A è diagonalizzabile se:
① ha tutti gli autovalori in K
$p_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i}$
$\lambda_i \in K$ autovalore $\quad$ $\lambda_i \in K$ autovalore
② per ogni autovalore di abbiamo $m(\lambda) = m(\lambda)$

Dimostrazione: basta trovare una base di autovettori.

Per ogni autovalore troviamo una base di $V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})$

Fatto ciò andremo a trovare $m(\lambda)$ $(= m(\lambda))$

Vogliamo utilizzare quanto ho trovato una base LIN. INDIP. di vettori
(unità vettoriali relativi ad autovalori diversi Lin. Indip.)
e siano rispettivamente m.
$\sum m(\lambda) \underset{\text{CRITERIO}}{\leq} \sum m(\lambda) = n$
$\underset{\text{quindi}}{\Rightarrow}$ $\sum m(\lambda) = n$
quindi per $p_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$
$\deg = n$

Dunque ho n vettori lin. indip. in base di V, quindi ho BASE DI AUTOVETTORI.

Problema:
- A, B diagonalizzabili $\not\Rightarrow$ AB, $A+B$ diagonalizzabile.
- A ogni $\Leftrightarrow$ invertibile $\Rightarrow$ $AB \underset{\mathbb{R}}{\sim} BA$ $\Rightarrow$ stesso pol. caratt. $p_{AB}(x) = p_{BA}(x)$
  A, B diagonalizzabili $\Rightarrow$ $p_{AB}(x) = p_{BA}(x)$ diagonalizzabili
- A, B sono SIMULTANEAMENTE DIAGONALIZZABILI
  (HAH e $H^{-1}BH$ diagonalizzabili
  $\Leftrightarrow$ $\exists$ base in cui A e B si diagonalizzano)
  Es. Cercare di diagonalizzabile (ma $\not\Leftarrow$)
  $\Leftarrow$ $AB = BA$.
  (Sogno: se A, B commutano, allora spazio stesso due φ diagonalizzabili dei singoli autovettori).