Riassunto: Similitudine:

$A \underset{K}{\sim}$ triangolare $\begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$\underset{K}{\sim}$ diagonale $\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

cerchiamo $v \in V = K^n$ t.c. $Av = \lambda v$ ($v \neq 0$; v autovettore, λ autovalore)

autovalori: λ autovalore di A sse $\ker(A - \lambda \mathbb{1}_n) \neq 0$
$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$
sse λ è zero del $p_A(x) := \det(x\mathbb{1} - A)$

Autovettore λ: $V_\lambda(\lambda) = \ker(A - \lambda \mathbb{1}_n) \leq V$

indipendenza di autospazi di autovalori diversi:

$\lambda \neq \mu$ $V_\lambda \cap V_\mu = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono $\neq$ tra loro $\Rightarrow$ $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono in somma diretta

(ogni vettore in $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k}$ si scrive in modo unico $\underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_k}_{v_{\lambda_1} \; v_{\lambda_2} \; \dots \; v_{\lambda_k}}$,
cioè ogni $V_{\lambda_i} \cap (\text{somma degli altri}) = 0$)

Criterio banale: A diag sse $\exists$ base K^n autovettori di A

Se A ha n autovalori $\neq$ tra loro in K, allora A è diagonalizzabile

Criterio di triangolarizzabilità:

A triangolabile sse ha tutti gli autovalori in K,
(sse il pol. caratt. si fattorizza nei fattori lineari)

Molteplicità per λ autovalore:
- algebrica: m_λ — $(x-\lambda)^k \mid p_A(x)$, $(x-\lambda)^{k+1} \nmid p_A(x)$
- geometrica: n_λ (NULLITÀ) — $\dim_K V_\lambda(\lambda)$

Dis: $1 \leq n_\lambda \leq m_\lambda$

Primo criterio di diagonalizz.: A diagonalizz. sse
1. ha tutti gli autov. in K ($\equiv$ è triangolarizz.)
2. $\forall$ autovalore λ: $n_\lambda = m_\lambda$

$\left[n_\lambda \leq m_\lambda \; \forall \lambda \Rightarrow \left(\sum n_\lambda = \underbrace{\sum m_\lambda}_{= \dim V} \Leftrightarrow n_\lambda = m_\lambda \; (\forall \lambda) \right) \right]$

Esempio facile:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = |x\mathbb{1}_4 - A| = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} x-4 & -1 \\ 0 & x-3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} x-3 & 0 \\ -1 & x-2 \end{matrix}} \end{vmatrix}$

$= (x-4)(x-3)^2(x-2)$

autovalori di A sono $\begin{cases} x = 4 & \text{molt } 1 \\ x = 3 & \text{molt } 2 \\ x = 2 & \text{molt } 1 \end{cases}$

ha tutti gli autov. in K $\Rightarrow$ triangolarizzabile

Calcoliamo gli autospazi:

V_4: $\ker(A - 4\mathbb{1}_4) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

V_3: $\ker(A - 3\mathbb{1}_4) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A diagonalizzabile!

V_2: $\ker(A - 2\mathbb{1}_4) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Concludiamo se uso la base $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ autovettori come colonne

allora $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 4 & & & 0 \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$ $(T - 4\mathbb{1})(T - 3\mathbb{1})(T - 2\mathbb{1}) = 0$

$\Rightarrow m_A(x) = (x-4)(x-3)^{\cancel{2}\,1}(x-2)$ $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & * & 0 \\ & & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ & * & 0 \\ & & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ & * & * \\ & & 0 \end{pmatrix}$
$\neq p_A(x)$

Noto invece:

$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

stesso pol. caratt.
ma $\dim_K V_B(3) = 1 < 2$ $\Rightarrow$ B non diagonalizz.!
ma TRIANGOLARIZZ.

(trovare base triangolarizzante!)

$\Rightarrow m_B(x) = (x-4)(x-3)^2(x-2)$

Teoria di HAMILTON-CAYLEY

studio del polinomio caratteristico & struttura della matrice (minimo)

DIVISORI $\longleftrightarrow$ sottospazi stabili

Teorema di Hamilton Cayley:

⊛ $A \in M_n(K) \Rightarrow p_A(A) = 0$

(($p_A(x) \in K[x]$: $p_A(x) = \sum a_i x^i$; $p_A(A) = \sum a_i A^i = a_0 \mathbb{1} + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$))
perché $p_A(x)$ è monico

"il polinomio caratteristico annulla la sua matrice"

⊛⊛ $\nu_A : K[x] \longrightarrow M_n(K)$
$p(x) \longmapsto \nu_A(p(x)) : p(A)$

è funzione LINEARE su K, poi $\dim_K K[x] = \infty$
$\dim_K M_n(K) = n^2 < \infty$
(certo $\ker(\nu_A) \neq 0$)

$p_A(x) \in \ker(\nu_A)$.
è IDEALE di $K[x]$ (perché ν_A è mappa di K-algebre)

sia $\ker(\nu_A) = (m_A(x))$

perché $K[x]$ è ANELLO A ID. PRINCIP. (PID)

polinomio MINIMO di A ≡
≡ polinomio MONICO di grado minimo in $\ker(\nu_A)$
≡ polinomio MONICO generante dell'ideale $\ker(\nu_A)$

⊛⊛⊛ $m_A(x) \mid p_A(x)$ perché $p_A(x) \in \ker(\nu_A) = (m_A(x))$
$= \{ f(x) m_A(x) \mid f(x) \in K[x] \}$

dimostriamo ⊛

due dimostrazioni possibili:
- usando $A \underset{K}{\sim}$ triangolare
- usando un calcolo con i polinomi.

vediamo la prima:

$A \sim T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$p_A(x) = p_T(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$

e sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ la base in cui la matrice è T.

allora calcoliamo
$[(A - \alpha_1)\ (A - \alpha_2) \cdots (A - \alpha_n)] : K^n \xrightarrow{\Phi} K^n$ $\boxed{\begin{matrix} \Phi = 0 \\ \Phi(K^n) = 0 \end{matrix}}$

$((A - \alpha_1)(A - \alpha_2) \cdots (A - \alpha_n))(\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle)$

$(A - \alpha_1)(A - \alpha_2) \cdots \underbrace{(A - \alpha_n)(\langle v_1, \dots, v_n \rangle)}$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_n & * & * \\ 0 & \ddots \; \alpha_{n-1} - \alpha_n & * \\ 0 & \dots \; 0 & 0 \end{pmatrix}]$ $(A - \alpha_n)\langle v_1 \dots v_n \rangle \subseteq \langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle$

$(A - \alpha_1)(A - \alpha_2) \dots (A - \alpha_{n-1})(\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle)$ $(A - \alpha_{n-1})\langle v_1 \dots v_{n-1} \rangle \subseteq \langle v_1 \dots v_{n-2} \rangle$

$\begin{pmatrix} \ddots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{(\langle v_1, \dots, v_{n-2} \rangle)}$

$\vdots$

$(A - \alpha_1)(\langle v_2 \rangle) = \langle 0 \rangle$ //

$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

dunque $p_T(T) = 0$

$p_A(A) = p_T(A)$ ($A \sim T$, $A = H^{-1}TH$)
$= p_T(H^{-1}TH)$
$= H^{-1} \underbrace{p_T(T)}_{0} H$
$= 0$ //

$\sum_i a_i T^i$
$\sum a_i (H^{-1}TH)^i$; $(H^{-1}TH)(H^{-1}TH) \cdots (H^{-1}TH)$
$\sum a_i H^{-1} T^i H$
$H^{-1}(\sum a_i T^i) H$

Problema: giustificare gli appunti la dimostrazione Algebrica (usando i polinomi)!

$M_n(K[x])$ matrici di polinomi ? $(M_n(K))[x]$ polinomi in X coefficienti in $M_n(K)$

$(a_{ij}(x))$ $\sum (A_i) x^i$

dimostrazione algebrica del H-C:

calcoliamo $p_A(x)\mathbb{1}_n - p_A(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x^i \mathbb{1} - A^i)$
$(p_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i)$
$= \sum_{i=0}^{n} a_i (x\mathbb{1} - A)(\underbrace{x^{i-1}\mathbb{1} + x^{i-2}A + \dots + xA^{i-2} + A^{i-1}}_{Q_i(x)})$
$= (x\mathbb{1} - A) \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i(x)$
$= (x\mathbb{1} - A)\, \underbrace{Q(x)}_{\text{matrice}}$

riconosciamo $p_A(A) = p_A(x)\mathbb{1} - (x\mathbb{1} - A)Q(x)$
$= (x\mathbb{1} - A)(x\mathbb{1} - A)^c - (x\mathbb{1} - A)Q(x)$
$= (x\mathbb{1} - A)[(x\mathbb{1} - A)^c - Q(x)]$
$= (x\mathbb{1} - A)[\text{matrice polinomiale in } X]$

$B \cdot B^c = \det(B)\mathbb{1}$, $B = (x\mathbb{1} - A)$, $\det(B) = p_A(x)$

matrice in K $= (x\mathbb{1} - A) \cdot (\text{matrice pol. in } X)$
$\Rightarrow$ $= 0$ (altrimenti ci sarebbe qualche potenza di X nel prodotto!) //
$= 0$

Conseguenze di H-C:

① $\nu_A : K[x] \longrightarrow M_n(K)$

linear $\ker(\nu_A) = (m_A(x))$ ($\neq 0$ perché $\dim_K K[x] > \dim_K M_n(K)$, $\infty > n^2$)

$\mathrm{im}(\nu_A) := K[A]$ (non può essere suriettiva!)
$= \{ \text{matrici polinomiali in } A \}$
$= \{ \sum_{i=0}^{n} a_i A^i \mid a_i \in K, n \in \mathbb{N} \} \subsetneq M_n(K)$
sotto algebra commutativa di $M_n(K)$

dal primo teo. iso: $\mathrm{im}(\nu_A) \simeq K[x]/\ker(\nu_A)$

$\boxed{K[A] \simeq K[x]/(m_A(x))}$

problema: $\dim_K(K[A])$? ($= \deg(m_A(x))$ grado del pol. minimo!)

② $m_A(x)$ = pol. minimo di A
per definizione è generatore monico di $\ker(\nu_A)$,
siccome $p_A(x) \in \ker(\nu_A)$
allora $m_A(x) \mid p_A(x)$ (dal teo H-C)

inoltre: i due polinomi hanno gli STESSI FATTORI IRRIDUCIBILI,
in particolare hanno gli stessi zeri,
dunque autovalori di A = zeri di $p_A(x)$
= zeri di $m_A(x)$.

banale: se $(x - \alpha) \mid m_A(x)$
siccome $m_A(x) \mid p_A(x)$
allora $(x - \alpha) \mid p_A(x)$.

(α zero $m_A(x) \Rightarrow \alpha$ zero di $p_A(x)$
$\Rightarrow \alpha$ autovalore.)

viceversa non banale:
se α è autovalore,
cioè $(x - \alpha) \mid p_A(x)$, $p_A(\alpha) = 0$
allora mostriamo che $m_A(\alpha) = 0$
perché
supponiamo di no, e mostriamo che
allora $m_A(A) \neq 0$ (assurdo)

infatti sia $v \in K^n$, $v \neq 0$, $Av = \alpha v$

supponiamo $m_A(x) = (x - \alpha) \cdots (x - \alpha_s)$ $\alpha_i \neq \alpha$
allora
$m_A(A) = (A - \alpha) \cdots (A - \alpha_s)$

$m_A(A)v = (A - \alpha_1) \cdots (A - \alpha_s)v$
$= (\quad) \cdots (Av - \alpha_s v)$
$\vdots$
$\cdots (\alpha - \alpha_s)v$ $\in K$
$= \underbrace{(\alpha - \alpha_1)}_{\neq 0} \cdots \underbrace{(\alpha - \alpha_s)}_{\neq 0} \underbrace{v}_{\neq 0} \neq 0$ ↯

$(x - \alpha_1)$
$(x - \alpha_1 x^0)$
$(A - \alpha_1 A^0)$
$(A - \alpha_1 \mathbb{1})$
$(A - \alpha_1)$

Conclusione: il polinomio minimo divide il caratteristico,
ma ha gli stessi fattori del caratteristico,

Piccoli: ha gli stessi fattori irriducibili;
eventualmente con molt. più piccole.

Esempio: se $p_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ α_i tutti $\neq$ tra loro
allora $m_A(x) = p_A(x)$

se $p_A(x) = (x - \alpha)^n$
allora $m_A(x)$ può essere $(x - \alpha)^i$ con $i \geq 1$, $\leq n$

esempi:
- $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ $p_A(x) = (x - \alpha)^3$ $m_A(x) = x - \alpha$ ($\ker(A - \alpha) = K^3$)
- $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ $p_A(x) = (x - \alpha)^3$ $m_A(x) = (x - \alpha)^2$ ($\ker(A - \alpha) \neq K^3$, $\ker(A - \alpha)^2 = K^3$)
- $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ $p_A(x) = (x - \alpha)^3$ $m_A(x) = (x - \alpha)^3$ ($\ker(A - \alpha)^3 = 0$)

attenzione: $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & 1 \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ hanno entrambe
- $p(x) = (x - \alpha)^4$
- $m(x) = (x - \alpha)^2 \dots$

③ se A è matrice invertibile,
allora
$p_A(x) = x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$, $a_0 = (-)^n \det(A)$

e siccome
$0 = p_A(A) = A^n + \dots + a_1 A + a_0 \mathbb{1}_n$

$0 = A(A^{n-1} + \dots + a_1 \mathbb{1}) + a_0 \mathbb{1}_n$

$A(A^{n-1} + \dots + a_1 \mathbb{1}) = -a_0 \mathbb{1}_n$

$A\left(-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + \dots + a_1 \mathbb{1})\right) = \mathbb{1}_n$

A^{-1} è matrice POLINOMIALE in A, $A^{-1} \in K[A]$.

Lemma di DECOMPOSIZIONE:

sia $\varphi : V \longrightarrow V$ ($A \in M_n(K)$)
e $F(x) \in K[x]$ tale che $F(\varphi) = 0$ (funzione nulla)
(($F(x) \in \ker(\nu_\varphi)$, $\nu_\varphi : K[x] \to \mathrm{End}(V)$, $p(x) \mapsto p(\varphi)$))

$F(x) = F_1(x) F_2(x) \cdots F_s(x)$
fattorizzazione con $F_i(x)$ 2 a 2 COPRIMI.
cioè $(F_i(x), F_j(x)) = K[x]$ se $i \neq j$
cioè esistono $G_i(x), G_j(x) \in K[x]$
tali che $G_i(x)F_i(x) + G_j(x)F_j(x) = 1$

allora $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ dove $V_i = \ker(F_i(\varphi))$
e sono sottospazi stabili per φ
$\varphi(V_i) \subseteq V_i$
$\varphi_i := \varphi_{|V_i} : V_i \longrightarrow V_i$
$m_{\varphi_i}(x) \mid F_i(x)$

Usiamo il lemma per $p_A(x)$ e $m_A(x)$ –

20/12/2022

il lemma si dimostra per induzione sul numero s di fattori, e basta vedere il caso $s = 2$.

$\varphi : V \longrightarrow V$ (oppure $A \in M_n(A)$)

$F(x) \in K[x]$: $F(\varphi) = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$
$F(x) = F_1(x) F_2(x)$ polinomi coprimi
$(F_1(x), F_2(x)) = (1)$
(esistono $G_1(x), G_2(x) \in K[x]$ tali che
$F_1(x) \cdot G_1(x) + F_2(x) G_2(x) = 1$)

allora $V = V_1 \oplus V_2$ con $V_1 = \ker(F_1(\varphi))$
$V_2 = \ker(F_2(\varphi))$
sottospazi stabili per φ, cioè $\varphi(V_1) \subseteq V_1$, $\varphi(V_2) \subseteq V_2$

$\varphi_1 = \varphi_{|V_1} : V_1 \longrightarrow V_1$: $m_{\varphi_1}(x) \mid F_1(x)$
$\varphi_2 = \varphi_{|V_2} : V_2 \longrightarrow V_2$: $m_{\varphi_2}(x) \mid F_2(x)$

ipotesi $\varphi : V \longrightarrow V$
$F(x) = F_1(x) F_2(x)$, $F(\varphi) = 0$
coprimi

($K[x]$ come $\mathbb{Z}$ è dominio euclideo
$\deg : K[x] \to \mathbb{N}$ $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$f = qg + r$ $a = bq + r$ $|r| < |b|$
$\deg(r) < \deg(g)$ "divisione di a per b con resto r"
"divisione di f per g con resto r"
$(a, b) = (\mathrm{mcd}(a, b))$
$(f, g) = (\mathrm{mcd}(f, g))$ $\alpha a + \beta b$ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
$\varphi f + \psi g$, φ, ψ polinomi
algoritmo di Euclide (esteso))

esistono $G_1(x), G_2(x) \in K[x]$ tali che
$1 = F_1(x)G_1(x) + F_2(x)G_2(x)$

$F(x) = \sum a_i x^i$
$F(\varphi) = \sum a_i \varphi^i$
$\in \mathrm{End}(V)$

dunque: calcolando per $X = \varphi$:
$\mathrm{id}_V = F_1(\varphi) \cdot G_1(\varphi) + F_2(\varphi) \cdot G_2(\varphi)$

Consideriamo ora $V_1 = \ker(F_1(\varphi))$
$V_2 = \ker(F_2(\varphi))$

vogliamo vedere:
① $V_1 + V_2 = V$
② $V_1 \cap V_2 = \langle 0 \rangle$
$\Big\}$ $V = V_1 \oplus V_2$
③ $\varphi(V_1) \subseteq V_1$

③ $v \in V$ qualsiasi
allora
$v = (F_1(\varphi)G_1(\varphi) + F_2(\varphi)G_2(\varphi))v$
$= \underbrace{F_1(\varphi)G_1(\varphi)v}_{v_2} + \underbrace{F_2(\varphi)G_2(\varphi)v}_{v_2}$

$F(x) = F_1(x)F_2(x)$
$0 = F(\varphi) = F_1(\varphi)F_2(\varphi)$
$= F_2(\varphi)F_1(\varphi)$

e ossia che $F_2(\varphi)(v_2) =$
$F_2(\varphi)(F_1(\varphi)G_1(\varphi)v)$
$F(\varphi)(G_1(\varphi)v) = 0$

$v_2 \in \ker(F_2(\varphi)) = V_2$

e poi si vede $v_2 \in V_1 = \ker(F_1(\varphi))$

② sia $v \in V_1 \cap V_2$ vogliamo vedere che $v = 0$
$v \in \ker(F_1(\varphi))$
$\in \ker(F_2(\varphi))$

$v = (F_1(\varphi)G_1(\varphi) + F_2(\varphi)G_2(\varphi))v$
$= G_1(\varphi)(\underbrace{F_1(\varphi)v}_{0}) + G_2(\varphi)(\underbrace{F_2(\varphi)v}_{0})$
$= 0 + 0 = 0$

③ mostriamo che $\varphi(V_1) \subseteq V_1$
se $v \in V_1 = \ker(F_1(\varphi))$
allora $\varphi(v_1) \in V_1 = \ker(F_1(\varphi))$
cioè $F_1(\varphi)(\varphi(v_1)) =$ deve essere 0
$\|$
$F_1(\varphi) \circ \varphi(v_1)$
$\varphi \circ \underbrace{F_1(\varphi)}(v_1) = \varphi(0) = 0$ //

(analogamente $\varphi(V_2) \subseteq V_2$)

Usiamo il lemma su $F(x) = p_\varphi(x)$
e $F(x) = m_\varphi(x)$

Secondo criterio di diagonalizzabilità:

Un endomorfismo φ è diagonalizzabile sse:
① ha tutti gli autovalori in K,
② il polinomio minimo si fattorizza in fattori lineari DISTINTI.

$\Leftarrow$ $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha & & & \\ & & & \beta & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \gamma \end{pmatrix}$ allora $p(x) = (x - \alpha)^{m_\alpha}(x - \beta)^{m_\beta} \cdots (x - \gamma)^{m_\gamma}$
ma $m(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \cdots (x - \gamma)$
perché
$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \boxed{\alpha} & \\ & & \boxed{\alpha} \end{pmatrix}}_{A - \alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{A - \beta} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\gamma} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{\gamma} \end{pmatrix}}_{A - \gamma} = 0$

$\Rightarrow$ siccome $m_\varphi(x) = \prod(x - \alpha_i)$ con $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$
allora per lemma di decomposizione:
$V = \bigoplus \underbrace{\ker(\varphi - \alpha_i)}_{\text{autospazi}} = \bigoplus V_\varphi(\alpha_i)$
mettendo insieme basi degli autospazi,
si trova una base dello spazio V fatta di autovettori,
quindi φ è diagonalizzabile //.

Sia $\varphi : V \longrightarrow V$
e $p_\varphi(x) = p_1(x) \cdots p_s(x)$
fattorizzazione in fattori 2 a 2 coprimi,
allora
$V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ ove $V_i = \ker(p_i(\varphi))$
$\varphi(V_i) \subseteq V_i$
e detta $\varphi_i := \varphi_{|V_i} : V_i \longrightarrow V_i$
abbiamo $p_{\varphi_i}(x) = p_i(x)$
(cioè $p_i(x)$ è polinomio caratteristico di $\varphi_{|V_i} : V_i \to V_i$ endomorfismo dal sottospazio V_i)

Note: l'unica cosa nuova è l'affermazione sul polinomio caratteristico, e si vede così:
sia $d_i = \deg_x(p_i(x))$ gradi dei fattori
e $n_i = \dim_K(V_i)$ dimensioni dei sottospazi V_i = grado dei pol. caratteristici dei φ_i
abbiamo
$\sum_i d_i = n$ (grado del pol. caratt)
$\sum_i n_i = n$ (dim dello spazio V)
e nel sottospazio V_i l'endomorfismo φ_i ha pol. minimo che divide $p_i(x)$ (perché $p_i(\varphi)$ annulla tutto $V_i = \ker p_i(\varphi)$)
e quindi il polinomio caratteristico ha per fattori solo quelli di $p_i(x)$, ma il prodotto deve dare $p_\varphi(x)$,
da cui si deduce $n_i = d_i$ ($\forall i$), quindi $p_{\varphi_i}(x) = p_i(x)$ ($\forall i$) //

Sia $\varphi : V \longrightarrow V$
e $m_\varphi(x) = m_1(x) \cdots m_s(x)$
fattorizzazione in fattori 2 a 2 coprimi
allora $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ con $V_i = \ker(m_i(\varphi))$
$\varphi(V_i) \subseteq V_i$
$m_{\varphi_i}(x) = m_i(x)$
(unica affermazione nuova è sui pol. minimi) //

Osservazione: l'utilità di queste decomposizioni è trovare sottospazi stabili, e quindi basi in cui le matrici sono scritte a blocchi diagonali:

$V = \bigoplus V_i$
$\varphi(V_i) \subseteq V_i$
$\Rightarrow$ $\alpha_j(\varphi) =$ $\begin{pmatrix} \boxed{\text{base } V_1} & \boxed{\text{base } V_2} & \boxed{\text{base } V_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\alpha_{v_1}(\varphi_1)$ $\alpha_{v_2}(\varphi_2)$ $\alpha_{v_3}(\varphi_3)$

se $v = (v_1, \dots, v_s)$ base di V
v_i base V_i
$\varphi_i = \varphi_{|V_i} : V_i \to V_i$ //

21/12/2022

Buone vacanze!