Riassunto:

Problema: dato $\Phi: V \to V$ lin una fissa $\mathcal{B}$ di V in cui $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ sia "semplice" (diagonale? triangolare?)

Oppure:
dati $A \in M_n(K)$ trovare $X \in GL_n(K)$ tale che $X^{-1}AX$ sia "semplice"

SINGOLARE: $A \simeq B \Leftrightarrow \exists\, X \in GL_n(K) : X^{-1}AX = B$
(ho di nuovo $\simeq$)
Problema equivalente: $M_n(K)/_{\simeq}$

trovare tra di loro una cui $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
ci porta a cercare autovalori/autovettori:

$\exists\, v : \Phi(v) = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ λ è un autovalore, v autovettore

Esempio: $\mathrm{Im}(\Phi) =$ autovettori di autovalore 1

Il problema $AX = XA$ con $X \in GL^n_{\lambda \in K}$ indipendente

Ora di diciamo:

Ho: il matrione $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A_0 = \lambda I$
sia $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (a+b) = 0$
sia $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda v = \lambda v$
sia $\lim_n (A-\lambda I)^n = 0$
sia $\det(A-\lambda I) = 0$

$\boxed{\text{pol. caratt. di } A\ (\text{o di } \Phi) : p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)}$

autovalori di A o Φ sono le λ di $p_A(\lambda)$
polinomio sommato del prodotto $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
indipendente da scelta base
$A \simeq B \Rightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$
per questo trovare un scalare λ tale che $\det(A - \lambda I) = 0$
trovare $X^{-1} = \Sigma\, \lambda_i - \mathrm{Tr}(A)$

Problema: il pol. caratteristico potrebbe avere radici non reali, quindi non riusciremo triangolarizzabile.

Ok:
- Triangolarizzabile:
$A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ ho tutti gli autovalori sul K
(Chiusura di K)
$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ di K
(ho radici di K)

- Diagonalizzabile:
$A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di autovettori per A
(Diagonalizzabile)

Se si diagonalizza di A:
analogico sul pol. A $= \ln(A - \lambda I)$
$V_\lambda(A) = V_\lambda(\lambda)$ = tutti gli autovettori di autovalore λ
$\in K$

$\dim_K(V_\lambda(\lambda)) =$ molteplicità del pol. per A

molteplicità del pol. per A $= \max$ $\{$ $\dim$ $\}$ tutti λ tali che $p_A(\lambda)$
$\{ \lambda_{\max}^{\alpha} \mid p_A(\lambda) \}$
$\{ \lambda_{\max}^{\alpha} \mid p_A(\lambda) \}$

Ok: $\forall \lambda : \alpha_\lambda \mathrm{mult}(\lambda) \geq \dim V_\lambda(\lambda) \geq 1$

- Polinomio caratteristico irriducibile:
$A \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ (1) ho tutti autovalori su K
(2) Vettori reali reali.

(5) Lemma: autovettori reali sul autovalori distinti sono lin indip.

Per cercare forme canoniche sono vuoti, adeguati, cioè cerchiamo "buoni spazi stabili su funzioni", cioè $W \subseteq V$: $\Phi(W) \subseteq W$.

Traccia al Manutella-Conflego

(1) $p_A(\lambda) = \emptyset$ $\quad$ $\begin{cases} \{\lambda \mid \lambda \in K\} \\ A \in M_n(K) \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} p_A(\lambda) = \Sigma \lambda^i \\ p_A(\lambda) = \Sigma \lambda^i \end{cases}$

(2) $K \xrightarrow{\Phi_A} K$ $\quad$ $\Phi_A(v) = Av$ è funzione del K-spazio, $(v) \to (Av)$ $\quad$ $\mathrm{Im}(\Phi_A) =$ Vettori del K^n generato da colonne

Generato massimo $\mathrm{Im}(\Phi_A) = \mathrm{Im}$ di Φ_A $\quad$ $\mathrm{Im}(\Phi_A) \subseteq \mathcal{B}(\lambda)$

(3) $M_n(K) \mid \mathcal{B}(\lambda)$

Lemma: $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{B}(\lambda) = (\lambda - 2)^3$
$\mathrm{mult}(2) = 3$
$\mathrm{rank}(2) = \dim \mathrm{Im}(A - 2I)$
$\mathrm{rank}(2) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{B}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$
$\mathrm{mult}(i) = 1$
$\mathrm{mult}(-i) = 1$
$\mathrm{rank}(i) = 1$
$\mathrm{rank}(-i) = 1$

$\mathcal{B}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^1$
$\mathrm{mult}(1) = 2$
$\mathrm{mult}(3) = 1$
$\mathrm{rank}(1) = 2$
$\mathrm{rank}(3) = 3$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{B}(\lambda) = (\lambda - 3)^3$
$\mathrm{mult}(3) = 3$
$\mathrm{rank}(3) = 2$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{B}(\lambda) = (\lambda - 3)^3$
$\mathrm{mult}(3) = 3$
$\mathrm{rank}(3) = 1$

$\mathrm{mult}(2) = 2 = \dim\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$
$\mathrm{mult}(3) = 1 = \dim\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^1 \neq 0$
$(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^1 = 0$
$\mathcal{B}(\lambda) = (\lambda - 2)^3 \neq 0$
$(\lambda - 2)^3 = 0$

Se $K = \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(\lambda)$ non con

$\mathcal{B}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 + \alpha_j \lambda + \beta_j)^{\gamma_j}$
$\alpha_i \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\gamma_j \in \mathbb{R}$
autovalori reali $\quad$ autovalori complessi

Polinomio reale in λ^2 pari
$\lambda^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[\lambda]$

Se $K = \mathbb{R}$ diagonalizzo $\Rightarrow$ ho autovalori reali
allora diagonalizzo $A \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

Attenzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$
$\mathcal{R}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$
(non lineare su $\mathbb{R}$!)
Se $\alpha + 2\alpha i \lambda$ di base $\{v, \bar{v}\}$
Supponiamo: se $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^2$ autovalori di $\alpha, \bar{\alpha}$
$\mathcal{R}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad$ base non base reale
$\alpha, \bar{\alpha}$ $\quad$ base reale
$\langle v, \bar{v} \rangle = \langle \frac{v + \bar{v}}{2}, \frac{v - \bar{v}}{2i} \rangle$
Trovo la matrice reale base reale!

Soluzione parziale:
definisco $\forall \lambda = \alpha + i\beta$
$\forall \beta \neq 0$
allora $\Psi\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{\Psi\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \Psi\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}}{2i}$
$= \frac{\alpha + i\beta - \alpha + i\beta}{2i} = \frac{2i\beta}{2i} = \beta$
$\frac{(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta)}{2i}$
$\Rightarrow$ $a = \alpha + i\beta$ $\quad$ $\Rightarrow$ $a = \mathrm{Re}(a)$
$c = \alpha + i\beta$ $\quad$ $c = \mathrm{Im}(a)$
$\Psi\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \ldots$
e notiamo $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & \mathrm{Im}(\lambda) \\ -\mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$
con cambio di base da $v, \bar{v}$ a $\frac{v + \bar{v}}{2}, \frac{v - \bar{v}}{2i}$
cioè con $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$
$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
perché $M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -i\alpha \\ -i\alpha & \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$
$= \begin{pmatrix} \alpha + i\alpha & -i\alpha + \alpha \\ -i\alpha + \alpha & \alpha + i\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & \mathrm{Im}(\lambda) \\ -\mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$

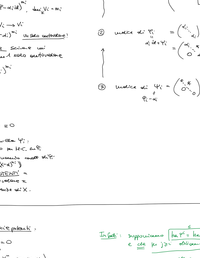
Teoria di Jordan:

Se una matrice si triangolarizzabile, esiste la base in cui la matrice sia diagonale.

(1) **Idea.** $\forall \Phi \in \mathrm{End}(V)$ $\exists\, \mathcal{B} \in M_n(K)$
triangolarizzabile da M
quindi:
$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \alpha_i)^{\alpha_i}$ $\quad$ $(\alpha_i \neq \alpha_j)$
$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \dim_K(V)$
ed usiamo la MCG: $p_A(\lambda) = \mathcal{B}$,
$\in \{$ Blocchi $(\lambda - \alpha_i)^{\alpha_i}$ $\quad i = 1, \ldots, n$
cioè Blocchi TRA LORO, quindi 2 a 2 coprimi

(2) quindi posso applicare il lemma del decomposizione:
$V = \oplus V_i$ $\quad$ $V_i = \ker(\Phi - \alpha_i \mathrm{id})^{\alpha_i}$, $\dim_K V_i = \alpha_i$
$\Phi(V_i) \subseteq V_i$
$\Phi : V_i \to V_i$: $V_i \to V_i$
$\Phi_i(v) = (\lambda - \alpha_i)^{\alpha_i}$ (in data autovalore)
dunque ABBIAMO DIAGONALIZZATO. Scelgo un base $\mathcal{B}$ ordinata una unione delle $\mathcal{B}_i$ di ogni autovalore.

(3) $\Phi : V_i \to V_i$ $\quad$ $\Phi_i(\lambda) = (\lambda - \alpha_i)^{\alpha_i}$
nilpotente $(\Phi_i - \alpha_i \mathrm{id})$: $V_i \to V_i$
allora $\Psi : V_i \to V_i$
e $\Phi_i(\lambda) = \lambda^{\alpha_i}$
cioè V_i ha una unica autovalore $\alpha = 0$
(perché $\Psi : V_i \to \alpha\, \mathrm{id}$
e quindi di polinomio λ^{α} annulla Ψ:
$(\Phi_i)^{\alpha_i} = (\Psi - \alpha\, \mathrm{id})^{\alpha_i} =$ 0 per la MCG α Φ
(polinomio reale ok!
$\in \mathbb{Q}[\lambda]$)
BASTA DIMOSTRARE LA FORMA NILPOTENTE =
trovo base come unione nilpotente e polinomio caratteristico è potenza di λ.



(4) Inoltre sul Ψ:

(5) Inoltre sul Ψ: $\Psi\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(6) Inoltre sul Ψ: $\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Lemma: trovo struttura con forma triangolare di Ψ Φ Φ $\Ph