Equivalenza diretta/diagonale : $A, B \in M_{n,n}(K)$

$A \underset{Eq}{\sim} B$ significa $B = HA$ con $H \in GL(K)$

moltiplicare a sx per matrici invertibili significa fare operazioni di Gauss sulle righe, ovvero a cambiare base nel codominio ($\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$).

Con operazioni elementari sulle righe possiamo ridurre ogni matrice in forma ridotta speciale:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e due matrici in forma speciale sono $\underset{Eq}{\sim}$ se e solo se sono proprio uguali tra loro:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{Eq}{\sim} \begin{pmatrix} A_1' \\ 0 \end{pmatrix} \iff A_1 = A_1'$$

perché $H\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 A_1 \\ H_3 A_1 \end{pmatrix}$, da cui $H_3 = 0$, $H_1 = E$.

Conclusione : le spazi vettoriali K^n ospitano tante classi di equivalenza diretta, quante le matrici $X \in M_{n,n}(K)$ (e ciascuna di esse una in $m \le X < 0$).

Problema : dovrebbe far stessa considerazione ragionando con i cambiamenti di base nel codominio.

Equivalenza diretta per $n \le 2$:

Matrici di rotazione nel piano:

$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$, $x+iy \longmapsto x-iy$ — coniugazione

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

$(x+iy)(x+iz) = (x+y)+i(x-y)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

matrice reale, quindi che senso ha $\mathbb{R}$ come? Dipendono/hanno significato su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$?

e le rotazioni $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$?

Poi semplicità: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

allora $p_\varphi(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$= x^2 - 2cx + c^2 + s^2$

autovalori $x_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2-1} = c \pm \sqrt{-s^2} = c \pm is$

non sono reali, a meno che $s = 0$, cioè $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, poi diagonale

dunque per $\mathbb{R}$ non è diagonalizzabile (non ci sono gli autovalori).

Invece su $\mathbb{C}$ ha due autovalori distinti $c \pm is$, quindi due autospazi unidimensionali, dunque diagonalizzabile.

$H^{-1} \varphi H = \begin{pmatrix} c+is & 0 \\ 0 & c-is \end{pmatrix}$

dove le colonne di H sono autovettori di $c \pm is$:

autovettore di $c+is$ = $\ker\begin{pmatrix} -is & -1 \\ 1 & -is \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -is \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$

autospazio di $c-is = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$

e $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ //

MORAL: ciò dicono che le matrici di rotazione dopo hanno non hanno autovettori REALI (tutti "nascosti") una hanno tutti e due autovettori COMPLESSI!

Invece $S = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$

è tale che $S^2 = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2+s^2 & 0 \\ 0 & s^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e quindi si tratta di matrici di SIMMETRIA:

$p_S(x) = \begin{vmatrix} x-c & -s \\ -s & x+c \end{vmatrix} = (x-c)(x+c) - s^2 = x^2 - c^2 - s^2 = x^2 - 1$

$= (x+1)(x-1)$.

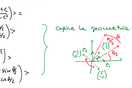
Ed sono più autovettori (asse di simmetria ed ortogonale)?

autosp. di $1 = \ker\begin{pmatrix} c-1 & s \\ s & -c-1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1+c \\ s \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

autosp. di $-1 = \ker\begin{pmatrix} c+1 & s \\ s & -c-1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} c-1 \\ s \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

capire la geometria:



Classificare diagonale e polinomi su termini del polinomio caratteristico.

Si/Quando sono il polinomio caratteristico uno è fattibile, per esempio la simmetria hanno solo autovalori ± 1, una proprietà dire che sono DIAGONALIZZABILI;

Con il polinomio minimale:

φ simmetria se pol minimo è X^2-1 o un suo divisore. (nota: significano φ simmetria se $\varphi^2 = id$, sia quindi $X^2-1 \dots$)

φ proiezione se pol minimo è $X(X-1)$ o un suo divisore. (nota: significano φ proiezione se $\varphi^2 = \varphi$, sia quindi $X^2 - X \dots$)

Generalizzazione: cosa possiamo dire di una funzione φ (o una matrice quadrata A) tale che

$\varphi^2 = \varphi$?

oppure $\varphi^3 = id$?

oppure $\varphi^4 = id$?

oppure $\varphi^4 = \varphi^2$?

Discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(eventualmente, se diagonale: sottospazi stabili e una matrice diagonale e blocchi diagonali).

Valutiamo il polinomio caratteristico:

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & x-3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & x-2 \end{vmatrix} =$

$= \left[(x-3)^2 - 4\right]\left[(x-3)^2 + 3\right] =$

$= (x-1)(x-5)\left(x^2 - 6x + 13\right)$

soluzioni $= 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$.

Quindi: su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$ non è diagonalizzabile, perché non ha tutti gli autovalori.

Invece su $\mathbb{C}$ ha 4 autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile.

Vediamo gli autospazi reali:

per autovalore $= 1$ abbiamo

$\ker(A - E) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(spazio che dà una dim 1 = molteplicità)

per autovalore $= 5$ abbiamo

$\ker(A - 5E) = \ker\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

e poi ci sono due autospazi stabili dei dim 2 che si

$\ker(A^2 - 6A + 13E) = \ker(\ ?\ ) = \left\langle \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix} \right\rangle =$

una che possiamo calcolare usando gli autovalori complessi.

ovvero $2 \pm 3i$: $\ker\begin{pmatrix} 1-3i & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3i & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1-3i & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -3i \end{pmatrix} =$

$\ker\begin{pmatrix} -1+3i & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 3-3i & 0 & 3+i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\ker\begin{pmatrix} -3i & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \ker\begin{pmatrix} -1+i & -1 & 1 & 1 \\ 1-i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ reale, non

$\ker(A - (2+3i)E) = \left\langle \begin{pmatrix} -1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (coniugato)

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (pochi reali e coniugati reali)

Conclusione: A simile su $\mathbb{C}$ a $\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 5 & & \\ & & 2+3i & \\ & & & 2-3i \end{pmatrix}$ diagonale

ed è simile su $\mathbb{Q}$ o su $\mathbb{R}$ a

$\left(\begin{array}{c|c} 4 & \\ \hline & \begin{matrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \end{array}\right)$ a blocchi diagonali (reali)

in generale la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ su $\mathbb{C}$ con $a = x+iy$

è simile su $\mathbb{C}$ alla matrice reale $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$:

infatti se $w = u + iv$ autovettore di $\bar{w} = u - iv$ autovettore di

vedere che u, v reali abbiamo:

$\begin{cases} A(u+iv) = \lambda u + i\lambda v \\ A(u-iv) = \lambda u - i\lambda v \end{cases}$

$\begin{cases} Au + iAv = \lambda u + i\lambda v \\ Au - iAv = \lambda u - i\lambda v \end{cases}$

$\Rightarrow Au = \frac{1}{2}\left((\lambda+i)v + (\lambda-i)v\right) = \frac{1}{2}\left(2\lambda u - 2\lambda v\right) = \lambda u - \lambda v$

$Av = \frac{1}{2i}\left((\lambda+i)u + (\lambda-i)v\right) = \frac{1}{2i}\left(2\lambda u + 2i\lambda v\right) = \lambda u + i\lambda v$

07/02/2022 :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(x)$?
$m_A(x)$?
J? base jordanizzante? $\forall A^*$ ($\in \mathbb{C}$)

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)^2(x-2)^3$

autovalori:	2	3
molteplicità	3	3
nullità	2	2

autospazi: $\ker(A-2E)$, $\ker(A-3E)$

$\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ $\rho = 3$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = 4$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\Rightarrow \dim \ker(A-3)^3$ $\neq \dim \ker(A-3)$

$A \underset{K}{\sim} J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \end{pmatrix}$

$\sim J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 \\ & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} v_1, v_4, v_5, v_2, v_3 \end{pmatrix}$

Per trovare una base jordanizzante,

per autovalore 2 trovo vettori : 2 autovettori trovati

per autovalore 3 devo cercare

$\ker(A-3)^3 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

(dim 3) $\rho = 2$

$\ker(A-3) \subset \ker(A-3)^3$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$(A-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A-3)$

Conclusione: come base jordanizzante posso scegliere:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi: $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ottiamo $H \in GL_5(K)$ e $H^{-1}AH = J = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix} \end{array}\right)$

$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow n$

jordan di N_0^2 $c = 1, 2, 3, \dots, n$.

$N_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\ker(N_0^2) = \langle e_1, e_2 \rangle$ $\Rightarrow$ 2 blocchi unitpot. standard

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^c$ jordan?

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho_1 + \rho_2$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$p = (x-1)^2$

$\ker(A-1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho = 2$

$\Rightarrow$ 2 blocchi

$\ker(N_0^2)$, $(N_0^2)^2$, $\ker N_0^3$, $(N_0^2)^3$, N_1, N_2, N_3

$N_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$N_4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$N_5 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\dim V = 6$ $\begin{pmatrix} N_4 & N_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{dim } \ker A \text{ è dim } \ker A^2 \dots \end{pmatrix}$

$\dim V = 6$ $\begin{pmatrix} N_4 & N_1 \end{pmatrix}$ 3, 4, 5, 6

$\dim V = 7$ $\begin{pmatrix} N_4 & N_3 \end{pmatrix}$ 2, 4, 5, 6

$\dim V = 8$ $\begin{pmatrix} N_4 & N_4 \end{pmatrix}$ 2, 4, 6, 8.

23/06/2021 :

$\varphi \in V$ $\varphi^4 = 0$
$\varphi^3 \neq 0$
$\dim(\ker \varphi^3) = 4$

trovare le possibili forme di Jordan per φ e φ^2.

siccome $\varphi^4 = 0$, $\varphi^3 \neq 0$, pol minimo è X^4 ($\dim V \ge 4$)

Quindi nella forma di Jordan c'è almeno blocco di matrice di nilpotenza, quindi i possibili autovalori del Jordan sono dei tipi:

$\dim V = 6$	$(N_4 \ N_2)$	3, 4, 5, 6
$\dim V = 6$	$(N_4 \ N_1)$	2, 4, 5, 6
$\dim V = 7$	$(N_4 \ N_3)$	2, 4, 6, 7
$\dim V = 8$	$(N_4 \ N_4)$	2, 4, 6, 8.

23/09/21 :

$\varphi \in V$
$m_\varphi = (x-1)^2(x+1)^2$

$\dim \ker(\varphi - 1) = 2$
$\dim \ker(\varphi + 1) = 2$

possibili forme di Jordan di φ? $\dim V$?

autovalori:	1	-1
molteplicità:	2	2

$\ker(\varphi-1) \oplus \ker(\varphi-1)^2 \oplus \ker(\varphi-1)^3 \dots$

$(x-1)^2$ è pol minimo di φ $\underset{\text{perché}}{\text{(è divisore}}$ $\underset{\text{di } m_\varphi)}{\text{di minimo}}$ quindi blocchi ≤ 2.

ci sono due blocchi

et $\ker(\varphi-1)^2$

$\ker(\varphi+1) \oplus \ker(\varphi+1)^2 \dots$

ci sono due blocchi ≤ 2

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ci sono 6 possibilità:

$\begin{pmatrix} J(1) & \\ & J(1) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J(1) & \\ & J(1) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J(1) & \\ & J(-1) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J(1) & \\ & J(-1) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J(1) & \\ & J(-1) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} J(1) & \\ & J(-1) \end{pmatrix}$

$n = 7$ $n = 8$

---

② del 17/01/2022

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Forma canonica su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$?

11/01/2023

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

NB: usare il Teorema di Laplace per il calcolo di $p_A(x)$ perché $A \xrightarrow{\text{non}} A^t$ A simile $\Rightarrow$ A^t $\xrightarrow{\text{stesso}}$ $\ker A = \ker A^t$

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$= (x^2 - 1 + 2)(x^2 - 1 + 5) = (x^2+1)(x^2+4)$

$= (x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)$

Su $\mathbb{C}$ la matrice è $\underset{K}{\sim} \begin{pmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & 2i & \\ & & & -2i \end{pmatrix}$ diagonalizzabile

su $\mathbb{R}$ invece è solo una di blocchi reali (reali non $\mathbb{R}$ per quelli interi)

la forma $\underset{\mathbb{R}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cerchiamo autospazi su $\mathbb{C}$:

$\ker(A - i\mathbb{E}_4) = \ker\begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1-i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\rho = 3$, dim ker $= 1$

$\ker(A + i\mathbb{E}_4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1+i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\ker(A - 2i\mathbb{E}_4) = \ker\begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1-2i \end{pmatrix}$

$\rho = 3$, dim ker $= 1$

$\ker(A + 2i\mathbb{E}_4) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{C})$

$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & 2i & \\ & & & -2i \end{pmatrix}$ //

Cerchiamo poi tipi reali su $\mathbb{R}$:

$p_A(x) = (x^2+1)(x^2+4)$

$V = \mathbb{R}^4 = \ker(A^2+4) \oplus \ker(A^2+4)$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1-2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

con matrice per la matrice A diventa:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 2 \\ & & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

con matrice per la matrice A diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -2 & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}$

verifica!

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

con matrice per la matrice A diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}$