Ultima settimana del 2° semestre: domanda veramente difficile?

Tornando indietro le settimane di studio:
Ripetiamo quanto detto finora (forse) [illegible] di aver appreso sulla [illegible] (anche pg. [illegible])

VENERDÌ 30/6: Ex-Th 30 dopo 8
[illegible] estremamente [illegible] (AA 23/24)

Prova scritta + orale: [illegible] (Nota [illegible] stesso)

Riassunto G.A.:

① Campi: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ $\{0,1\}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \{0,1,\dots\}$, ...
Caratteristica: $\mathbb{R}$ campo $\Rightarrow$ $1 \neq -1$ $\Rightarrow$ $1+1 \neq 0$
allora $\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (modulo p)
dove $p \neq 0$ primo (!)
Ogni caratteristica $\mathbb{R}$ è quella di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (!)

② Spazi vett. / $\mathbb{R}$ $\longleftrightarrow$ Strutture
Ogni spazio vettoriale V è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$ (!)
$V, \{v_1, \dots, v_n\}$ base $\longleftrightarrow$ $v \in V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
$V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ dipende dalla base

Cosa cambiamo in base al cambio (matrice di cambio base)?
$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$
$v \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$
$v \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Operazioni varie: $v \in V$ sottospazi, $\dim$, $\cap, +, \oplus, \dots$ dipendono dalla base!

Domanda Quadrata: dual.

③ $V \xrightarrow{f} V$ endomorfismo
f diagonalizzabile
$\exists$ base di V tale che f è diagonale

Cambio base/Matrice
$f: V \to V$
$f \circ f$ diagonalizzabile
$\Rightarrow$ $\exists$ base di V tale che $f \circ f$ è diagonale
$\Rightarrow$ $\exists$ base di V tale che f è diagonale

$f \circ f$ diagonalizzabile $\Rightarrow$ f diagonalizzabile
$\Rightarrow$ $\exists$ base di V tale che f è diagonale

$f: V \to V$
$\lambda \in V$
$f(\lambda) = \lambda v$ $\Rightarrow$ λ autovalore
$v \neq 0$
$f(v) = \lambda v$
$f(v) = \lambda v$
$f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$
$f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$
$\lambda^2 v = \lambda^2 v$
$\lambda^2 = \lambda^2$
$\lambda = \lambda$
$\lambda = -\lambda$
$\lambda = 0$

$f: V \to V$
$\lambda \in V$
$f(\lambda) = \lambda v$
$f(v) = \lambda v$
$f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$
$f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$
$\lambda^2 v = \lambda^2 v$
$\lambda^2 = \lambda^2$
$\lambda = \lambda$
$\lambda = -\lambda$
$\lambda = 0$

$f: V \to V$ $\longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$ matrici quadrate

Cambio base/Matrice
$f: V \to V$
$v \longmapsto a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n$
$v_1 \longmapsto a_{21}v_1 + \dots + a_{2n}v_n$
$\vdots$
$v_n \longmapsto a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n$
$M(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$
Spazio duale!
Spazio delle funzioni lineari
Elementi φ_{v_i} di spazio V
$\vdots$

Sottospazi lineari del spazio duale:
$A(\lambda) = \lambda \iff \varphi_v \xrightarrow{\text{sottospazio}} \ker(\varphi_v) = \{v \in V : \varphi_v(v) = \lambda\}$
$\varphi_v(v) = \lambda$
$\varphi_v(v) = \lambda$
sottospazio lineare
$\dim(\ker(\varphi_v)) = n-1$

Proiezioni lineari $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(M, V)$ / φ equivalenza
$\varphi(v)$
$A \oplus B$ con $\dim M = \dim(A \cup C)$
$B = M \cap A^{\perp}$

Quadratiche lineari $\longleftrightarrow$ $M_n(\mathbb{R})$ / φ equivalenza
$A \cap B$ con $\dim(A \cap C) = \dim(A \cap C)$
$B = M \cap A^{\perp}$

Nota: $A \in M_n(\mathbb{R})$ si ha
matrice di cambio base $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(A)$ $\Rightarrow$ proprietà invariate per cambiamento base $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(A)$

④ $M_n(\mathbb{R})/\sim$ $\longleftrightarrow$ polinomi:
$A \sim B \iff \det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$
$\det(A-\lambda I) \in \mathbb{R}[\lambda]$
polinomio caratteristico
modulo $\sim$ / coefficienti: invariante
① Determinante che sarebbe det
② $\det(A-\lambda I)$ invariante $\Rightarrow$ invariante $\det$.

T. Hamilton-Cayley: $p_A(A) = 0$ per invarianza $\Rightarrow$ $\det(A) = \det(B)$ cosa dicono polinomi caratteristici

T. diagonalizzazione: $P(A) \quad P(A) = 0$
$P(A) = (A-\lambda_1 I)$
λ_1 radice
$\Rightarrow$ $V = \oplus V_i$
$\lambda \in \dim(P(A))$
$\varphi: V \to V$
$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
diagonalizzazione del P del Cauchy A
$\Rightarrow$ diagonalizzazione di V in sottospazi $\mathbb{R}[\lambda]$ per $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 2^n sottospazi
Teoria di Jordan: [illegible] Jordan [illegible] particolare.

Applicazione del pol. caratteristico:

① $\varphi: V \to V$ $\quad \varphi^2 = \mathrm{id}$ $\quad \varphi$ proiezione
$\Rightarrow$ Vogliamo $\varphi^2 = \mathrm{id}$ $\quad (\varphi^2 - \mathrm{id}) = 0$
allora, φ soddisfa il polinomio $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$
dunque $m_{\varphi}(\lambda) \mid \lambda(\lambda-1)$
quindi, per 2° criterio φ è diagonalizzabile
($\mathbb{R}$ pol. irriducibile fino per $\mathbb{R}$ [illegible]
$\mathbb{C}$ radici $\pm i$)
inoltre, pol. minimale deve $\neq 1$
per dimensionalità:
$V = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi + \mathrm{id})$ (sottospazi di V con $\dim = \dim(\ker(\varphi - \mathrm{id}))$ $\dim V$ $\dim \ker(\varphi + \mathrm{id})$)
$\varphi(\ker(\varphi - \mathrm{id})) = \ker(\varphi - \mathrm{id})$
$\varphi(\ker(\varphi + \mathrm{id})) = -\ker(\varphi + \mathrm{id})$
$\Rightarrow$ $\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \\ & -\mathrm{id} \end{pmatrix}$
$\varphi^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \\ & \mathrm{id} \end{pmatrix}$
$\varphi^2 = \mathrm{id}$
$\varphi^2 = \mathrm{id}$
$\varphi^2 = \mathrm{id