

prima prova parziale Geometria 1 parte A - 18 novembre 2022

Il compito va svolto in due ore (circa mezz'ora per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare tutte le radici in \mathbb{C} dell'equazione $(Z - i)^3 = 8$.

- (a) Determinare equazioni cartesiane ed hermitiane delle rette per le tre radici trovate.
- (b) Determinare le equazioni hermitiane delle circonferenze ottenute dalle rette precedenti per inversione rispetto al cerchio unitario.
- (c) Rappresentare il tutto nel piano di Gauss e descrivere l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni del triangolo (i cui vertici sono le radici trovate).

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^4 :

$$U_1 = \langle e_1 + e_3 + e_4, e_3 - e_4 \rangle, \quad U_2 : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 - X_4 = 0 \end{cases}, \quad U_3 : \begin{cases} 2X_1 - X_4 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare basi ed equazioni cartesiane per i seguenti due sottospazi di K^4 :

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \quad \text{e} \quad U_1 \cap (U_2 + U_3).$$

- (b) In generale, per tre sottospazi U_1, U_2, U_3 di uno spazio vettoriale V , mostrare che

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \leq U_1 \cap (U_2 + U_3)$$

e mostrare che non vale necessariamente l'uguaglianza. Controllare che l'uguaglianza vale se $U_1 \leq U_2$ oppure $U_1 \leq U_3$.

- (c) Vi sono altre condizioni per cui vale l'uguaglianza? Determinare se possibile condizioni necessarie e sufficienti sui tre spazi affinché valga l'uguaglianza.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare con incognite X_1, X_2, X_3, X_4 e parametri λ, μ :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ \lambda X_1 + \mu X_2 + \lambda X_3 + \mu X_4 = 0 \\ (1 - \lambda)X_1 + (1 - \mu)X_2 + X_3 + X_4 = 1 + \mu \end{cases}$$

- (a) Scrivere la matrice completa del sistema e determinare i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare dei parametri.
- (b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione, e determinare tali soluzioni.
- (c) Determinare una base dello spazio generato dalle colonne della matrice incompleta del sistema.