

prima prova parziale Geometria 1 parte A - 20 novembre 2023

Il compito va svolto in 3/2 ore (circa mezz'ora per esercizio), da soli, senza consultare materiali di qualsiasi natura.

Ogni esercizio va risolto in modo leggibile, giustificando con la precisione necessaria la soluzione proposta.

Alla fine si consegna questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento del compito.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli con lo svolgimento:

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Testo del compito:

Esercizio 1. Determinare tutte le radici in \mathbb{C} dell'equazione $(Z + i)^3 - i = 0$.

- (a) Determinare equazioni cartesiane ed hermitiane delle rette per le tre radici trovate.
- (b) Determinare equazioni hermitiane, centri e raggi delle circonferenze ottenute dalle rette precedenti per inversione rispetto al cerchio unitario.
- (c) Rappresentare il tutto nel piano di Gauss e descrivere l'immagine tramite l'inversione precedente dei punti interni del triangolo (i cui vertici sono le radici trovate).

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di K^5 :

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V : \begin{cases} X_1 - X_3 - X_5 = 0 \\ X_2 - X_3 - X_4 + X_5 = 0 \end{cases}.$$

- (a) Determinare dimensioni, basi ed equazioni cartesiane per U , V , $U \cap V$, $U + V$.
- (b) Esistono iperpiani H di K^5 tali che $H \cap (U + V) = U$? E tali che $H \cap (U + V) = V$? Se sì, determinarli tutti.
- (c) Siano U' un complementare di U , e V' un complementare di V . Che dimensioni hanno U' e V' ? Che dimensioni può avere $U' \cap V'$?

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare con incognite X_1, X_2, X_3, X_4 e parametro α :

$$\begin{cases} \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_4 = 2\alpha \\ \alpha X_2 + \alpha X_3 + (\alpha^2 - \alpha + 1)X_4 = 2\alpha \\ X_1 - X_2 - X_3 - X_4 = 1 \end{cases}$$

- (a) Scrivere la matrice completa del sistema e determinare i ranghi delle matrici completa e incompleta al variare del parametro.
- (b) Determinare per quali valori del parametro il sistema ammette soluzione, e determinare tali soluzioni.
- (c) Dette $S(\alpha)$ ed $S(\beta)$ le soluzioni del sistema per parametri α e β , descrivere l'insieme $S(\alpha) \cap S(\beta)$ al variare dei parametri.